Beyträge
zur Aufnahme
der Theoretischen
Mathematik

von

Wencesl. Joh. Gustav Karsten,
der Weltweisheit Doctor und Professor
zu Bützow.

Das vierte und letzte Stük.

Rostok,
bey Anton Ferdinand Röse. 1761.

Beschlus der Abhandlung

von den

Grundsätzen der Differential- und Integral-Rechnung.

Ein Frauenzimmer, das die Natur voll-
„kommen wohl gebildet hatte, giebt sich „zuweilen durch eine Kleidung nach der „Mode ein ungestaltes Ansehen: und die „Rechnung des Unendlichen scheint in der „Hülle der gewöhnlichen Redensarten „Fehler an sich zu haben, die dadurch nicht bedeckt werden, „daß sie den Mathematikverständigen unerschöpfliche Schätze „von Erfindungen darbietet. Denn für den Augen eines „Geistes, dem nur Wahrheit schön ist, würde sie doch „allemahl eine häsliche Reiche seyn. Zum Glücke sind es „nur Fehler ihrer Kleidung; zuweilen hat sie sich unge-„schickter Schneider bedienet, zuweilen hat sie mit Willen „in der Eil eine Salope um sich geworfen.„ Dies ist das Urtheil, welches der Herr Prof. Kaestner in der Vorrede seiner Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen von der Lehre des Unendlichen in der Mathematik fället. Und es gereicht zu meinem sehr grossen Vergnügen, daß dieses Urtheil eines der grösten Meister in der mathematischen Erfindungskunst mit dem meinigen vollkommen übereinstimmet, wenn ich behauptet habe, der gewöhnliche Vortrag dieser

Lehre sey ungeschickt, die Anfänger in den geometrischen Wahrheiten mit augenscheinlicher Deutlichkeit und Ueberzeugung zu unterrichten. Ich will gern zugeben, daß es Männern, die mit der Wissenschaft vollkommen bekant sind, gleichviel seyn könne, ob ihnen eine Wahrheit in einer geschickten, oder ungeschickten Kleidung vorgetragen wird. Allein dieses kan unmöglich Anfängern gleichgültig seyn. Diese sind gröstentheils im Anfange mehr gewohnt auf die Worte, als auf die Sache selbst zu sehen, und ist die Wahrheit, welche sie zuerst lernen sollen, in eine ungestalte Kleidung eingehüllet, so legen sie diese häsliche Gestalt, der Wahrheit selbst bey. Denn sie kennen die Wahrheit noch nicht, und sind noch nicht im Stande, das Kleid von der Sache selbst zu unterscheiden. Schärfen nicht eben deswegen alle Lehrer der Vernunftlehre einem jeden Lehrer die Pflicht ein, daß er beym Unterricht der Anfänger die geschicktesten und deutlichsten Worte und Redensarten wählen müsse. Ich bin damit völlig einig, wenn der Herr Prof. Kästner in der Vorrede zu der angeführten Schrift urtheilet, daß die Rechnung des unendlichen nach dem Vortrage der Neuern von den Beweisen der Alten ohngefehr so unterschieden sey, wie sich der kühne Ausdruck eines Dichters von dem vielleicht logisch richtigern, aber trockenen Vortrage des Philosophen unterscheidet. Allein der kühne Ausdruck des Dichters ist demjenigen ganz unverständlich, der an der Dichtkunst noch gar keinen Geschmack hat. Meine Bemühungen, den Lernenden die Lehre des Unendlichen in der natürlichsten und unverstelten Kleidung vorzutragen, sollen nie darauf abzielen, die grossen Männer zu tadeln, welche durch die gewöhnlichen Redensarten ihren Vortrag abkürzen; sondern ich schmeichle mich vielmehr damit, daß ich wisbegierige Anfänger dadurch geschickter mache, den Vortrag der grossen Erfinder desto besser zu verstehen, und ihre Schriften mit grössern Nutzen zu lesen. Und wenn ich bisher bemühet gewesen bin, zu zeigen, was es mit den unendlich kleinen Grössen in der Differentialrechnung

rechnung für eine Bewandnis habe, so will ich jezt zum Beschlus noch untersuchen, in welchem Verstande die Redensart statt haben könne, wenn man von dem Worte Integriren diese Erklärung giebt: Es heisse soviel, als eine unendliche Menge unendlich kleiner Grössen zusammen summiren.

Es sey y eine Funktion von x, und man seze in dieser Funktion an stat x nach und nach folgende Werthe in einer abnehmenden arithmetischen Progression x, $x - \Delta x$, $x - 2\Delta x$, $x - 3\Delta x$, $x - 4\Delta x$, u. s. w.; man bezeichne die respondirenden Werthe von y auf diese Art: y^{-I}, y^{-II}, y^{-III}, y^{-IV}, u. s w.; so wird in dieser Reihe jedes folgende Glied aus dem nächstvorhergehenden entstehen, wenn man in demselben $x = \Delta x$ stat x schreibet. Es sind dieses nemlich die Reihen der 202. S. rückwärts fortgesezt. Man subtrahire jedes vorhergehende Glied von dem nächstfolgenden, so wird $y - y^{-I} = \Delta y^{-I}$, $y^{-I} - y^{-II} = \Delta y^{-II}$, $y^{-II} - y^{-III} = \Delta y^{-III}$, $y^{-III} - y^{-IV} = \Delta y^{-IV}$, u. s. w. Es ist also $y = \Delta y^{-I} + y^{-I}$, $y^{-I} = \Delta y^{-II} + y^{-II}$; $y^{-II} = \Delta y^{-III} + y^{-III}$, u. s. f., und deswegen $y = \Delta y^{-I} + \Delta y^{-II} + \Delta y^{-III} + \Delta y^{-IV} + \Delta y^{-V} + \Delta y^{-VI}$, u. s. w. Die Funktion y ist also würklich die Summe aller vorhergehenden Werthe der Differenz Δy. Aus dieser Ursache soll selbige durch den griechischen Buchstaben Σ, wenn derselbe vor Δy stehet, angezeiget werden, daß $\Sigma \Delta y = y$. Ist also $z = \Delta y$, so wird $\Sigma z = y$.

Die Differenz von ay ist $a\Delta y = az$, wenn a eine beständige Grösse anzeiget (S. 105.) also ist $\Sigma az = ay = a\Sigma z$. Wenn also eine veränderliche Grösse durch eine beständige multipliciret worden, so ist die Summe dieses Produkts ein Produkt aus der Summe des veränderlichen Faktors in den beständigen. Ferner ist anzumerken, daß eigentlich $\Sigma z = y + C$ gesezt werden müsse, wenn man die Summe vollständig haben will, da denn C eine beständige Grösse bedeutet, die aus den Bedingungen der Aufgabe bestimt werden muß. Es ist also $\Sigma \Delta x = x + C$,

$\Sigma a\Delta x = ax + C$, und weil hieselbst Δx als eine beständige Differenz angenommen wird, so ist $\Sigma \Delta x^2 = x\Delta x + C$, $\Sigma \Delta x^3 = x\Delta x^2 + C$, und überhaupt $\Sigma \Delta x^n = x\Delta x^{n-1} + C$. Nun ist oben S. 124. dieser algemeine Ausdruck für die Differenz Δy einer jeden Funktion y der veränderlichen Grösse x gefunden worden $\Delta y = \frac{\Delta x . dy}{1 . dx} + \frac{\Delta x^2 ddy}{1.2.dx^2} + \frac{\Delta x^3 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{\Delta x^4 d^4 y}{1.2.3.4.dx^4} +$ 2c. Hieraus folgt, es sey y

$$= \Delta x \Sigma \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \Sigma \frac{ddy}{dx^2} + \frac{dx^3}{2.3} \Sigma \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{2.3.4} \Sigma \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{\Delta x^5}{2.3.4.5} \Sigma \frac{d^5y}{dx^5} + \text{etc.},$$

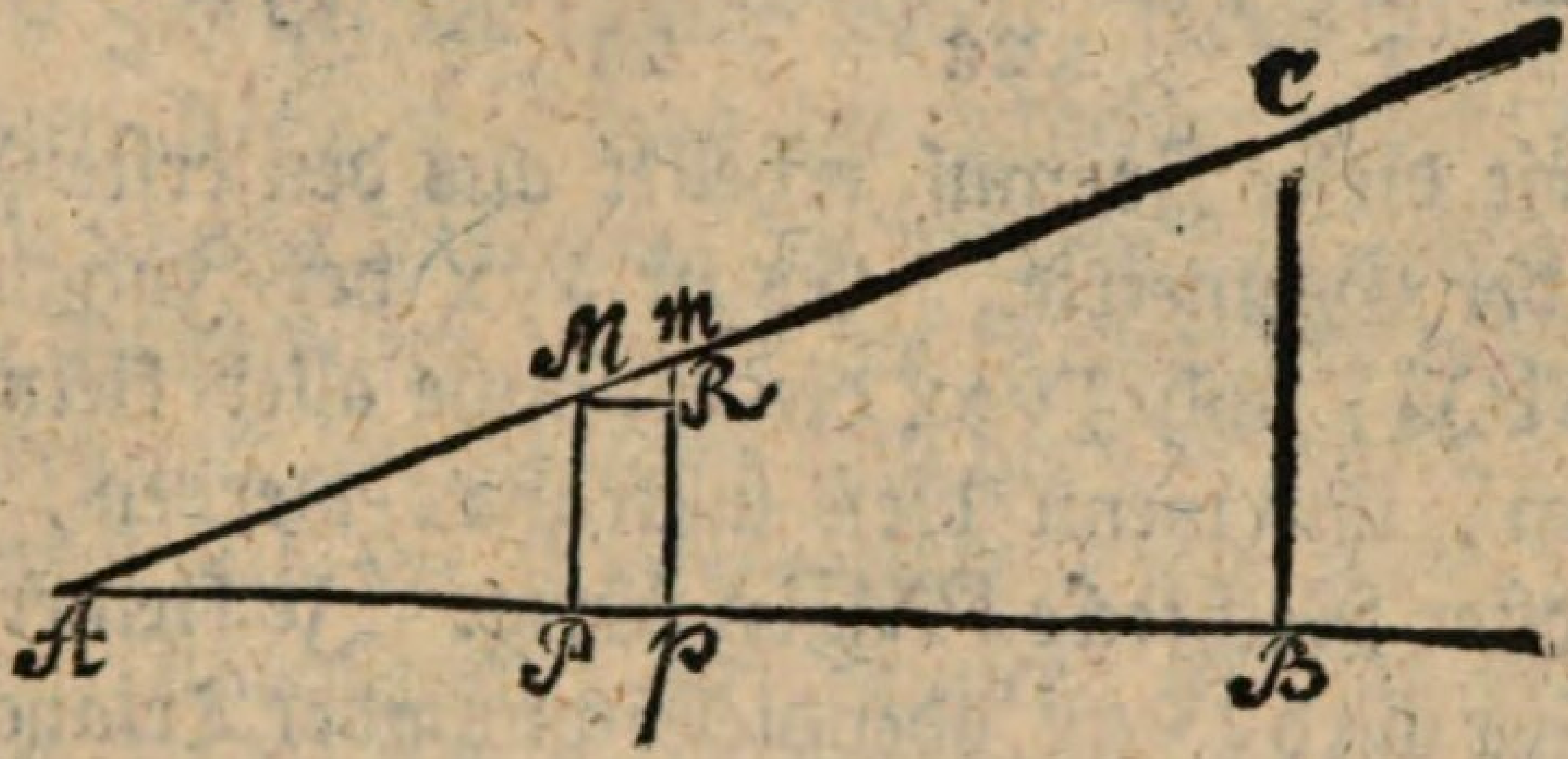
und

$$\Delta x \Sigma \frac{dy}{dx} = y - \frac{\Delta x^2}{2} \Sigma \frac{ddy}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{2.3} \Sigma \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{\Delta x^4}{2.3.4} \Sigma \frac{d^4y}{dx^4} - \text{etc.}$$

Hat man also das Differentialverhältnis $\frac{dy}{dx}$ der Funktion y, so hat man aus dieser Formul die Summe des Exponenten dieses Differentialverhältnisses in die beständige Differenz Δx multipliciret. Diese Summe ist allemahl von der Funktion selbst unterschieden, wie die Formul ausweiset, nähert sich aber der Funktion y immer mehr, je kleiner Δx angenommen wird. Sobald Δx verschwindet, wird diese Summe $= y$, und deswegen kan man sagen, die Funktion y sey die Grenze, welcher sich jene Summe immer mehr nähert, je mehr die Differenz Δy abnimt, welche sie aber eigentlich nie erreicht, so lange noch Δx eine wirkliche Grösse ist; oder mit andern Worten: Die Funktion y sey unter allen Summen, so diese Formul ausdrückt, nach den verschiedenen Werthen, die man Δx beyleget, indem man voraussezt, daß Δx beständig abnehmen soll, die lezte Summe. Dies ist die Ursache, weswegen die Funktion

ction y, oder das Integral von dy, auch die Summe von dy heissen kan, und es erhellet daraus zugleich deutlich, was die Redensart, ein gegebenes Differential summiren eigentlich für eine Bedeutung habe. Ein sehr leichtes Exempel wird die Sache noch weiter aufklären.

Es sey ABC ein gradlinichter Triangel, worin AB $= a$, BC $= b$. Man theile AB in eine beliebige Anzahl



gleicher Theile, deren jeder $= Pp$, und es sey AP $= x$, PM $= y$, so ist $Pp = \Delta x$, und die Gleichung für die grade Linie AC ist $y = \frac{b}{a}x$. Der unbestimte Flächeninhalt des Triangels APM sey $= s$, so ist $PM = \frac{ds}{dx}$ $= y$, und $\sum y\Delta x = \Delta x \sum \frac{ds}{dx}$ die Summe aller in dem Triangel beschriebenen Parallelogrammen PMRp. Eine leichte Rechnung wird sehr bald zeigen, wie vortreflich hier die Geometrie mit der Analysi übereinstimme. Weil $\sum \Delta x = x$, und $\frac{\Delta x}{\Delta x} = x^{\circ} = 1 = \frac{1}{\Delta x}\Delta x$; so ist $\sum x^{\circ} = \sum 1 = \frac{x}{\Delta x}$. Ferner ist $\Delta . x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$, also $x^2 = \sum 2x\Delta x + \sum \Delta x^2 = 2\Delta x \sum x + \Delta x^2 \sum 1$; $2\Delta x \sum x =$

 $x^2 -$

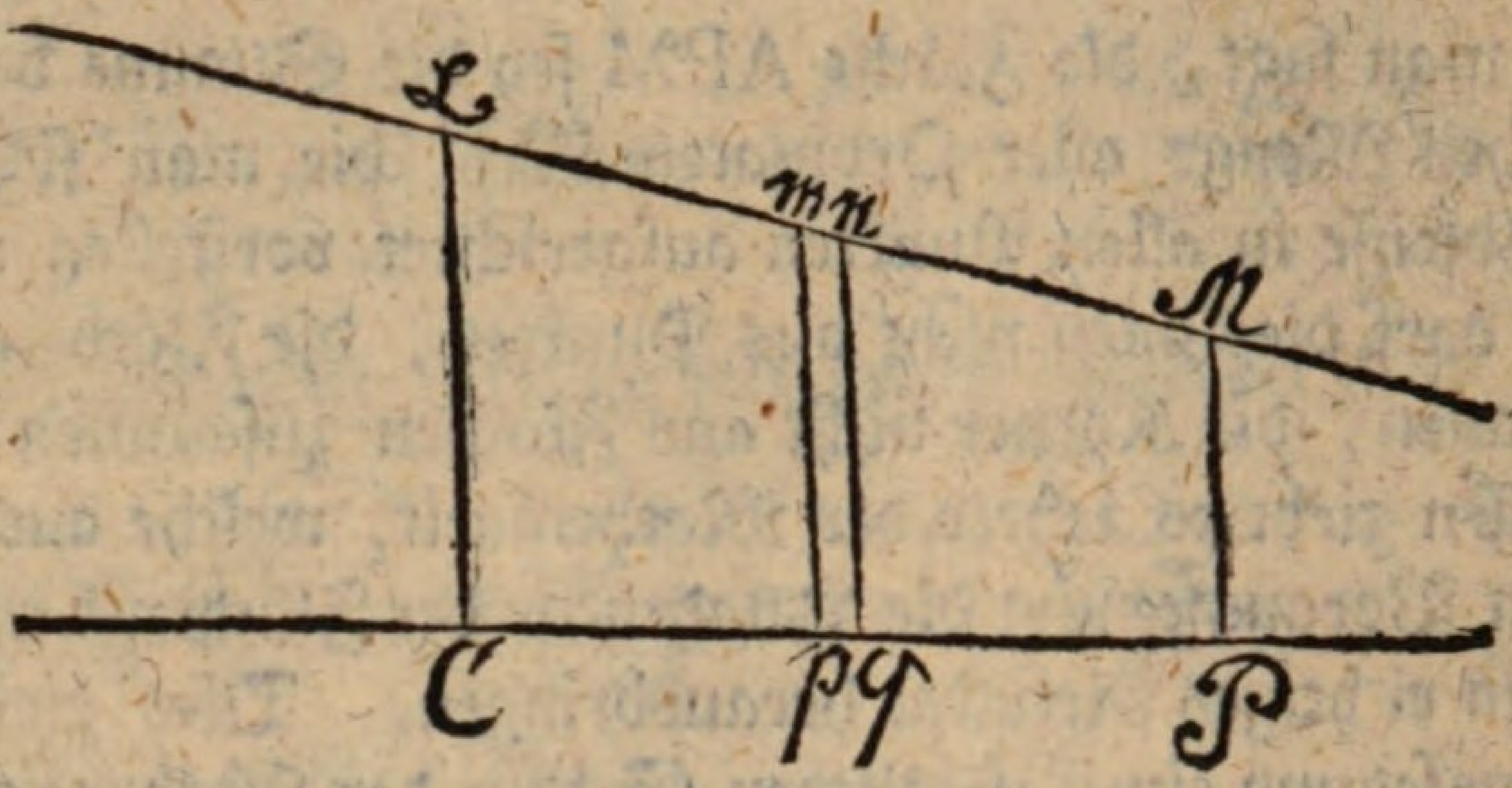
$x^2 - \Delta x^2 \sum 1$, und $\sum x = \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \sum 1 = \frac{x^2}{2\Delta x}$ $- \frac{x}{2}$. Nun ist im angenommenen Exempel $y = \frac{b}{a}x$, und $\Delta x \sum \frac{ds}{dx} = \Delta x \sum \frac{b}{a} x = \frac{b}{a} \Delta x \sum x = \frac{b}{a} \Delta x$ $\left(\frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{x}{2}\right) = \frac{bx^2}{2a} - \frac{bx\Delta x}{2a} = \frac{1}{2}yx - y\Delta x$. Die Richtigkeit dieser Formul erhellet aus den ersten Anfangsgründen der Geometrie. Es ist $\frac{1}{2}yx$ der Inhalt des Triangels APM, und $\frac{1}{2}y\Delta x$ die Summe aller kleinen Triangel MRm, und wenn diese subtrahirt werden, bleibt der Inhalt aller Rechtecke PMRp übrig. Je kleiner Δx wird, desto kleiner wird $\frac{1}{2}y\Delta x$, oder die Summe der Triangel MRm, und die Sume der Rechtecke PMRp nähert sich dem Flächeninhalt des Triangels APM immer mehr; die Grenze dieser Summen, die den verschiedenen immer kleinern Wehrten von Δx respondiren, die letzte unter diesen Summen, indem Δx verschwindet, ist $\frac{1}{2}yx$, oder der Triangel APM.

Hieraus erhellet, wie man eigentlich die Art zu reden der neuern Analysten erklären müsse, wenn sie sich so ausdrücken, der Flächeninhalt APM sey die Summe der unendlichen Menge aller unendlich-schmalen Rechtecke PMRp, deren Grundlinien die Differentiale Pp von AP oder x sind. Eigentlich solten sie sagen: Die Fläche APM ist die Grenze, welcher sich die Summe dieser Rechecke immer mehr nähert, je kleiner Pp = Δx wird, und welche diese Summe nie erreicht, so lange Δx noch eine wirkliche Grösse ist; sie ist also die Grenze, welcher sich die Summe dieser Rechtecke ohne Ende nähert, wenn man voraus setzt, daß Δx ohne Ende vermindert wird. Nichts ist also der geometrischen Strenge und Deutlichkeit weniger gemäs, als

wenn

wenn man sagt, die Fläche APM sey die Summe der unendlichen Menge aller Ordinaten PM, die man sich über der Absciſſe in allen Punkten aufgerichtet vorstellen müſſe. Man darf die Linien nicht aus Punkten, die Flächen nicht aus Linien, die Körper nicht aus Flächen zuſammen ſetzen. Indeſſen giebt es Lehrer der Mathematik, welche aus einer ſolchen Vorausſetzung die Quadratur der Flächen herleiten, und ein richtiges Reſultat herausbringen. Dies giebt der Vorausſetzung einen ziemlichen Schein der Wahrheit, und es iſt ohne Zweifel der Mühe werth, dieſes Verfahren mit der richtigen Art, wie man die Flächen durch Hülfe der Integralrechnung quadrirt, zu vergleichen. Es iſt wahr, daß man in gewiſſen Fällen die Redensart dulden könne, die Differentiale der Flächen ſeyn die Ordinaten, eben deswegen, weil ſich die Differentiale, wie dieſe Ordinaten verhalten. Allein nichts iſt gewiſſer, als daß der Satz in geometriſcher Schärfe genommen unrichtig ſey, wenn man ſagt, der Flächeninhalt einer von einer krummen Linie der Absciſſe und Ordinate eingeſchloſſenen Figur ſey die Summe der Ordinaten. Eben daher kömt es, daß manche Lehrer der Mathematik die Formuln für die Quadratur der bekanteſten krummen Linien aus wirklich unrichtigen Vorausſetzungen herleiten, und nur zufälliger Weiſe ein richtiges Reſultat herausbringen. Um ein Beyſpiel hievon zu geben, will ich eine Stelle aus des Herrn de la Caille Leçons Elementaires de Mathematiques herſetzen:

Der 779. §. dieſer Schrift lautet ſo: Les principaux problêmes qu'on doit ſe propoſer lorsqu'on a une courbe a examiner conſiſtent 1°. a chercher — — 4°. on cherche quelle eſt la quadrature de la courbe, c'eſt a dire, quelle aire ou ſurface eſt renfermée dans la courbe entiere, ſi elle eſt fermée, ou dans une de ſes parties donnees, comme ſi on demandoit la ſurface compriſe entre l'arc LM d'une courbe une partie CP de ſon diametre,



et ſes deux ordonnees MP, CL, dont l'une comme CL part de l'origine des x de l'equation de la courbe. Pour cela on ſuppoſe que depuis cette origine on ait diſpoſé parallelement a l'ordonnée CL ou MP, autant de parallelogrammes *pqmn* terminés a la courbe d'une part, et de l'autre a la ligne des abſciſſes CP, *qu'il y a des points* depuis C juſqu'en P; tous ces parallelogrammes, qui ſont infinis en nombre, ſont donc ſi etroits, que les droits *pm*, *qn* ſont confondues, et qu'ils peuvent etre pris *pours des ſimples ordonnées* au diametre CP. Or CP etant la derniere x, toutes les x compriſes entre l'origine C et qui repondent a chacune *de toutes ces ordonnées* compriſes entre CL et PM, croiſſent ſelon cette ſuite ou progreſſion arithmetique $\frac{x}{\infty}$, $2\frac{x}{\infty}$, $3\frac{x}{\infty}$, $4\frac{x}{\infty}$, — — — $\infty\frac{x}{\infty} = x$. Car la premiere y infiniment proche de CL a pour ſon x une partie infiniment petite de CP, c'eſt a dire $1\frac{x}{\infty}$; la ſeconde a ſon x double dú precedent, paisqu'elle repond au ſecond point compris entre C et P, et compté depuis C; cette x eſt donc $a\frac{x}{\infty}$; la troiſieme y a ſon x triple

ou

ou $3\frac{x}{\infty}$, et ainsi de suite, d'ou il'est evident, qu'on peut representer toutes ces x par la suite infinie $\div$ 1, 2, 3, 4, — — — x. Or l'equation a la courbe ne renfermant d'indetermineés que x et y, on peut prendre autant de valeurs de y, qu'on en peut supposer a x, c'est a dire, qu'il y a de terme dans cette suite: on aura donc par ce moyen *une suite infinie d'ordonées* comprises entre CL et PM; et si on peut sommer cette suite, on aura la quadrature exacte de l'aire CLMP: si on ne la peut sommer, et si cette suite et assez convergente, on n'aura la quadrature qu'a peu pres, et d'autant plus exactement; que l'on sommera effectivement plus de termes consecutives de cette suite d'ordonées.

Der 888. §. löset folgende Aufgabe auf:

Trouvet la quadrature des sections coniques. 1) *Solution pour la parabole.* Soit proposé de quarrer l'espace entre le sommet et l'ordonnée PM; on a PM $=y=\sqrt{px}$; soit $p=1$, donc $y=\sqrt{x}$, ou $y=x^{\frac{1}{2}}$. Donc pour avoir *la somme* des ordonnées comprise entre le sommet et MP, il ne s'agit que de sommer la suite $1^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{2}}, 4^{\frac{1}{2}}$, — — — $x^{\frac{1}{2}}$. La somme est $\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$ $=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}=\frac{2}{3}xy$. Will man untersuchen, ob die Formul $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ aus der Voraussetzung folge, so wird die Frage seyn, ob $\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$ der terminus summatorius einer Reihe sey, deren terminus generalis $x^{\frac{1}{2}}$ ist? Herr de la Caille beruft sich auf eine vorhergehende Stelle seines Lehrbuches, woselbst er gelehret hat, wie man die

Reihe

Reihe summiren soll, deren terminus generalis x^n ist. Er hat es nur für einige specielle Fälle untersucht, und keine allgemeine Formul gegeben. Diese ist sonsten, wenn Sx^n den terminum summatorium einer Reihe bedeutet, deren terminus generalis x^n ist, folgende: $Sx^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $+ \frac{n}{2} Sx^{n-1} + \frac{n.n-1}{2.3} Sx^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2}{2.3.4} Sx^{n-3}$ + etc. — Const. in derselben sind alle Glieder, wenn man sie entwickelt, nach den Dignitäten von x geordnet, deren Exponenten $n+1$, n, $n-1$, $n-2$, u. s. f. sind. Nun schliest Herr de la Caille, wenn man diese Reihe ins unendliche fortsetzt, daß also $x = \infty$ wird, so ist $S\infty^n = \frac{\infty^{n+1}}{n+1}$, weil alle folgende Glieder in Vergleichung des ersten verschwinden. Also ist $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ die Summe aller Glieder der Reihe 1^n, 2^n, 3^n, 4^n, u. s. f. ins unendliche fortgesetzt. Wenn also x die Abscisse der Parabel bedeutet, deren Ordinate $x^{\frac{1}{2}}$, so ist $\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$, die Summe aller Ordinaten, so den Gliedern der Reihe $1\frac{x}{\infty}$, $2\frac{x}{\infty}$, $3\frac{x}{\infty}$, $4\frac{x}{\infty}$, u. s. f. ins unendliche fortgesetzt respondiren. Allein zugeben, daß $Sx^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ werde, wenn $x = \infty$ wird; (welches doch weiter nichts heist, als daß das letzte Verhältnis von $Sx^n : \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{n}{2} Sx^{n-1}$ + etc., womit diese beyden Grössen aufhören endlich zu seyn, die ratio æqualitatis

sey,)

sey,) so ist ja doch das letzte Glied der unendlichen Reihe $1\frac{x}{\infty}$, $2\frac{x}{\infty}$, $3\frac{x}{\infty}$, $4\frac{x}{\infty}$, u. s. f. nicht ∞, sondern $\infty\,\frac{x}{\infty}=x$, und man sucht die Quadratur der krummen Linie nicht für dem Fall, da die Abscisse $x=\infty$. Man sucht also nach der Voraussetzung des Hern de la Caille nicht die Summe der unendlichen Reihe $\left(1\frac{x}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(2\frac{x}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(3\frac{x}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(4\frac{x}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}}$, u. s. f. bis $\left(\infty\frac{x}{\infty}\right)^{\frac{1}{2}}$, welche von der vorigen sehr unterschieden ist. Die Summe jener wächst ins unendliche, die Summe dieser letztern ist endlich. Es geschicht also blos von ohngefehr, daß nach diesen Schlüssen die richtige Formul für die Quadratur der Parabel heraus komt. Es komt dieses nemlich daher, weil das erste Glied der Reihe, welche den terminum summatorium Sx^n ausdrückt, einerley ist, mit dem ersten Gliede der Reihe, welche die Summe $\Sigma\, x^n\Delta x$ ausdrückt, wenn hier das Wort Summe die Bedeutung hat, welche §. 277. angezeigt worden. Denn wenn man $y=x^{n+1}$ setzt in der §. 278. gefundenen Reihe

$$\Delta x\,\Sigma\,\frac{dy}{dx}=y-\frac{\Delta x^2}{2}\,\Sigma\,\frac{ddy}{dx^2}-\frac{\Delta d^3}{2.3}\,\Sigma\,\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{\Delta x^4}{2.3.4}\,\Sigma\,\frac{d^4y}{dx^4}-\text{etc.},$$

so hat man $(n+1)\,\Delta x\,\Sigma\, x^n = x^{n+1} -$

$$\frac{\Delta x^2}{2}\,\overline{n+1}.n.\Sigma\, x^{n-1}-\frac{\Delta x^3}{2.3}(n+1).n.(n-1)\,\Sigma\, x^{n-2}$$

$$-\frac{\Delta x^4}{2.3.4.}(n+1)\,n.(n-1)\,(n-2)\,\Sigma\, x^{n-3}-\text{etc.},$$ und

also

also $\Delta x \sum x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{n}{2} \Delta x \sum x^{n-1} - \frac{n \cdot n-1}{2 \cdot 3} \cdot$ $\Delta x^2 \sum x^{n-2} -$ etc. Nimt also Δx beständig ab, und verschwindet zulezt, so ist die Grenze dieser Summe $= \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $= \int x^n \, dx$, welcher Ausdruck ganz etwas anders sagen will, als Sx^n, so den terminum summatorium einer Reihe, deren terminus generalis x^n ist, bedeutet.

Verbesserungen und Zusätze

zu des Verfassers Lehrbuch der theoretischen Mathematik.

Es sind zu meinem Misvergnügen einige Fehler in meiner theoretischen Mathematik stehen geblieben, die ich bey anderweitigen Geschäften, da der Abdruck besorget wurde, übersehen habe. Ich werde diese Fehler hier verbessern, und zugleich einige Zusätze hinzu fügen, um einige etwas unvollständige Stellen zu ergänzen.

Die Lehre von den Parallellinien hat mir viele Zeit und Mühe gekostet, weil ich gern für den 13. Grundsatz des Euclides einen Beweis haben wolte, der auf keinen andern Grundsätzen gebauet wäre, als solchen, die seit Euclides Zeiten als Grundsätze in der Geometrie sind gebraucht worden. Allein ich sehe jetzt wohl, daß meine Bemühung bisher noch fruchtlos gewesen ist. Ich glaubte, der Satz §. 91. höbe die ganze Schwierigkeit, wenn Clavii Beweis, so wie ich ihn vorgetragen habe, verbessert würde.

Allein die Erinnerung dagegen, welche ich in den Göttingischen Zeitungen lese, finde ich vollkommen gegründet. Und da mich dieses veranlasset hat, die Sache nochmahl zu überdenken, so fange ich an zu glauben, daß man keinen völlig strengen Beweis aus den Grundsäzen, die sonst bey dieser Lehre nur vorausgesezet werden, führen könne, wofern man nicht auch diesen Saz als einen Grundsaz zu Hülfe nehmen wil, daß alle Punkte, die von einer graden Linie gleich weit entfernt sind, in einer graden Linie liegen. Es ist wahr, daß man keinen leichten Beweis aus der Natur der graden Linie führen könne, diesen Grundsaz darzuthun. Allein, man kan auch keinen leichten geometrischen Beweis führen, den Grundsaz zu beweisen, daß die grade Linie unter allen übrigen, die mit ihr einerley Grenzen haben, die kürzeste sey, und dennoch läst man ihn als einen augenscheinlich richtigen Grundsaz gelten. Und mir wenigstens komt der andre Saz, daß alle Punkte, die von einer graden Linie gleich weit entfernt sind, in einer graden Linie liegen, eben so überzeugend vor, daß er nach meinem geringen Urtheil unter den geometrischen Grundsäzzen gar wohl eine Stelle einnehmen könte. Wenigstens wird diesem Saz unter den Grundsäzen eher eine Stelle eingeräumet werden können, als dem 13. Euklidäischen. Ich würde also lieber, wenn ich die Sache dazumahl reiflicher erwogen hätte, den Saz des 92. §. so bewiesen haben, wie ich S. 225. in dieser Schrift Clavii ersten Beweis vorgetragen habe, und so könte der 91. Saz als eine leichte Folge daraus in völliger Allgemeinheit hergeleitet werden.

Der Beweis im 186. §. für die Proportional-Regel, welche die Alten divisionem rationis nennen, folgt nicht, wenn die Proportion irrational ist. Die Säze

$$A > na \text{ und } A < (n+1)a$$
$$C > nb \text{ und } C < (n+1)b$$

sind unter den angenommenen Bedingungen richtig, allein daraus lassen sich die folgenden

$$A-C > n(a-b) \text{ und } A-C < (n+1)(a-b)$$

nicht

nicht unmittelbar schliessen. Man würde die Folge rechtfertigen können, wenn man setzte, es sey,

$$A = na + d$$
$$C = nb + \delta$$

und also $A - C = na - nb + d - \delta$, woraus erhellen würde, daß $na - nb + d - \delta$, oder $A - C >$ sey, als $na - nb$, wenn bewiesen wäre, daß $d >$ sey, als δ, und dieser Beweis müste durch viele Umwege geführet werden. Eben so wenn man setzte

$$A + c = (n+1)a$$
und $$C + e = (n+1)b$$

so wäre $A - C + c - e = (n+1)a - (n+1)b$, und $A - C < A - C + c - e$ oder $(n+1)a - (n+1)b$, wenn bewiesen wäre, daß allemahl $c > e$, welches wiederum durch viele Umschweife geschehen muste. Daher ist es am besten, den Beweis für diese Proportional-Regel so zu führen, wie ich ihn im vorigen Stük dieser Schrift S. 261. vorgetragen habe.

Die Regel des 191. §. ist nur in einer gewissen Einschränkung wahr, die ich hinzuzusetzen vergessen habe, und dieses ist vornemlich einer unvorsichtigen Anwendung der Formul $na : ma = nb : mb$, die sonst für die rationalen Proportionen allemahl richtig ist, zuzuschreiben. Wenn ich die beyden Proportionen annehme

$$A : B = C : D$$

imgleichen $E : F = G : H$,

und ich drükke die erste so aus

$$na : ma = nb : mb,$$

so hätte ich die andre so ausdrükken müssen

$$\nu c : mc = \nu d : md,$$

woselbst nicht angenommen werden darf, daß n und ν einerley Zahl sind, weil sonst diese Regel von der Regel des 186. §. nicht unterschieden bleibt. Wäre dieses Versehen in dem Beweise nicht begangen worden, so würde mich der Beweis selbst an die ausgelassene Bedingung des Satzes erinnert haben. In dem Beweise für dem Fall, da eine

oder

oder beyde Proportionen irrational sind, steckt eben der Fehler. Die Regel selbst habe ich aus der VI. Prop. des XII. Buches Euklidis genommen, woselbst Euklides die Regel in einem speciellen Fall gebraucht. Meine Absicht war, sie unter den Proportionalregeln deswegen besonders zu beweisen, weil ich mich derselben in einigen folgenden Beweisen, als im 322. 329. und 335. §. bedienet habe, damit diese Beweise dadurch abgekürzt werden mögten. Und es hat seine Richtigkeit: aus den Proportionen

$$A : B = C : D$$

und $E : F = G : H$

folgt diese $A \pm E : B \pm F = C \pm G : D \pm H$ unter der Bedingung, wenn auch diese Proportion wahr ist:

$$A : E = C : G.$$

Der Beweis kan so geführet werden:

Weil zuerst $A : E = C : G$ und $E : F = G : H$, so folgt $A : F = C : H$. Es ist aber $B : A = D : C$ (hyp.) also auch $B : F = D : H$. Ferner $A : E = C : G$, also $A \pm E : E = C \pm G : G$. Es ist aber $E : F = G : H$, also $A \pm E : F = C \pm G : H$. Endlich ist auch $B : F = D : H$, also $B \pm F : F = D \pm H : H$, oder $F : B \pm F = H : D \pm H$.

Aus den beyden Proportionen aber

$$A \pm E : F = C \pm G : H$$

und $F : B \pm F = H : D \pm H$ folgt

$$A \pm E : B \pm F = C \pm G : D \pm H.$$

Im Zusatz zum 191. §. mus also diese Einschränkung ebenfals nicht vergessen werden, daß die Folge nur alsdann richtig sey, wenn auch

$$A : E = C : G$$

und $E : I = G : L$, u. s. f.

Denn aus der ersten von diesen Proportionen folgt

$A + E : E = C + G : G$, und aus dieser mit der zweyten zusammen genommen folgt ferner

$$A + E : I = C + G : L.$$

Da nun $A : B = C : D$
$E : F = G : H$
und $A : E = C : G$, so ist
$A + E : B + F = C + G : D + H$
Weil ferner $I : K = L : M$
und $A + E : I = C + G : L$
so folgt $A + E + I : B + F + K = C + G + L : D + H + M$.
Die Lehrsätze also in den §§. 322. 329. 335. nebst ihren Beweisen, behalten ihre völlige Richtigkeit, weil die hinzugesetzte Bedingung daselbst stat hat.

Im 220. §. hat der 6te Zusatz eine unrechte Stelle bekommen. Er mus daselbst wegbleiben, und dagegen dem 225. §. als der 2te Zusatz beygefüget werden, weil die Proportion $p : P = r : R$ im 225. §. allererst bewiesen wird.

In der 114. Figur, worauf sich dieses Cor. beziehet, ist ein Halbmesser des kleinern Cirkels, der CH heissen solte, nicht ausgedruckt, an dem Umkreis des grössern sol der Buchstab K, und an dem Umfang des kleinern der Buchstab I noch stehen. Im Zusatz zum 220. §. stehen ebenfals die Buchstaben unrichtig. Stat AKB mus BIC, stat DLE mus EKF, ferner BAC stat ACB, EDF stat DFE, CB stat AB, und FE stat DE gelesen werden.

Im 61. §. der Rechenkunst wird man einen Irthum in der Rechnung wahrnehmen. Anstat 3 thal. 12 gr. $2\frac{4}{5}$ ob, solten 3 thal. 21 gr. 10 ob gesezt seyn.

Und dies würden die Fehler seyn, die ich in dem Parte Elementari angetroffen habe, wenn ich noch in einigen Stellen einige Druckfehler ausnehme, woselbst die Buchstaben etwas unrichtig gesezt sind, die ich aber zum Theil in dem Buche selbst schon angezeiget habe. In Ansehung des 12. §. der Rechenkunst wil ich nur noch erinnern, daß der Beweis dieses Satzes hätte kürzer geführet werden können. Ein jeder Bruch und seine Einheit sind commensurable Grössen. Denn sie haben ein gemeinschaftliches Maas, und dies ist derjenige aliquote Theil der Einheit, der in der-

selben

selben so vielmahl enthalten ist, als der Nenner des Bruchs anzeigt. Wenn nun bewiesen ist, daß zwey Grössen unter sich commensurabel seyn, wenn sie mit einer und eben derselben dritten Grösse commensurabel sind, so folgt, daß jede zwey Brüche commensurabel seyn müssen, eben deswegen, weil sie es mit der Einheit sind. Wenn aber A mit C und B mit C commensurabel ist, so sind auch A und B commensurabel. Denn wenn n und m, imgleichen ν und μ zwey ganze Zahlen bedeuten, so daß $A : C = n : m$, und $C : B = \nu : \mu$: so kan man zu ν, μ, und m allemahl eine vierte Proportionalgrösse finden, wenn man ν, μ, und m durch drey grade Linien vorstelt. Es sey N diese vierte Proportionallinie, so ist das Verhältnis von $m : N$, ein Verhältnis zweyer ganzen Zahlen, und weil also

$$A : C = n : m$$
$$C : B = m : N$$
so ist $$A : B = n : N$$

das heist, das Verhältnis von $A : B$ läst sich durch zwey ganze Zahlen ausdrükken, und beyde Grössen sind commensurabel. Auf diese Art wäre es nicht nöthig gewesen, im 12 §. Gründe zu gebrauchen, die im 30. §. nochmahl, obgleich etwas algemeiner vorkommen.

Ausser den im Buche selbst bereits angemerkten Druckfehlern habe ich noch folgende wahrgenommen. S. 111. Z. 25. mus man setzen AC stat AD, S. 121. Z. 21. FH stat GA, S. 122. GHA et GHD stat LHA et LHD. Im 253. §. BC stat EF, AI stat AG, I stat G, KL stat GI, AP stat AC, AQ stat AB, PAQ stat BAC. Im 254. §. FG stat AB, HI stat CD, AD stat EH, AC, BD stat EG, FH. (Ich hatte für diese §§. andre Figuren gezeichnet, die ich nachher, den Raum zu ersparen, weglies, weil sie schon einmahl, nur mit andern Buchstaben gezeichnet, da waren. Habe aber dabey die Buchstaben zu ändern vergessen.) S. 124. Z. 7. AE et AG stat FE et FG. S. 125. Z. 27. AB stat MB. S. 126. Z. 5. R stat M. S. 137. Z. 15. 16. BGD, stat BED. S. 138.

Z. 15. HGI stat GHI. Z. 33. AB stat BD. S. 143. Z. 12. BAC stat ABC. S. 144. Z. 25. DCB stat DEF, und DB stat DF. S. 148. Z. 14. RNr stat RMr. S. 160. Z. 16. SK stat IK. S. 163. Z. 14. LP stat LN. Z. 25. AM stat M. S. 167. Z. 1. 2. 3. 4. 7. DEG stat DER. S. 168. Z. 23. GD et QI, GD et RK, GD et SL stat GQ et DI, GR et DK, GS et DL. S. 170. Z. 8. AH stat AG. S. 171. Z. 28 u. 29. EIKC stat FIKG. S. 172. Z. 6. Pyramide abcd mus hinzugefügt werden cum priore ABCD æque alta. Z. 29. ABC : EFG stat ABCD : EFGH.

Was am Ende des 71. §. der Math. Analysis vorkomt, bedarf einer Verbesserung, wenn anders die Folgen richtig zusammen hängen sollen, die daraus in der Folge hergeleitet werden. Ich sezte die lezten Säze im 71. §. deswegen hinzu, damit im 83. §. der Saz ausser Streit als richtig angenommen werden könne, daß der Bruch $\frac{X}{x-\eta}$ nicht $=0$ sey, wenn η stat x gesezt werde. Denn obgleich $\frac{X}{x-\eta}=\frac{0}{0}$ wird, wenn man η stat x sezet, so folget doch nicht nothwendig, daß hier der Bruch $\frac{0}{0}$ einen endlichen Werth habe, er kan auch $=0$ seyn, und ist wirklich $=0$, wenn einige Wurzeln der Gleichung $X=0$ einander gleich sind. Allein da ich einen Fehler habe vermeiden wollen, bin ich in einen andern verfallen. Der Ausdruk $\frac{P-P}{\eta-\eta}=\frac{P}{\eta}$ ist eben so wenig algemein richtig, als daß $\frac{0}{0}$ niemahlen $=0$ seyn solte. Im 71. §. müssen also die lezten Säze: Similibus, quibus hic usus sum - - - bis zu Ende des §. wegbleiben, und alsdann müste der 83. §. so lauten:

Si æquatio $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + px^{m-n+1} + qx^{m-n} \ldots + rx^2 + sx + t = 0$, cujus radices α, β,

$\beta, \gamma, - - - - \zeta, \eta$, omnes sunt inæquales, *dividatur per æquationem simplicem* $x - \eta$, *quotus* $\frac{X}{x-\eta}$ *fiet* $= 0$ *a substitutis* $\alpha, \beta, \gamma, - - - \zeta$, *non vero a substituto* η, *vel ullo alio quanto.* Evanescit enim numerator X a substitutis $\alpha, \beta, \gamma, - - - - \zeta$, ergo et fractio $\frac{X}{x-\eta}$ est æquatio gradus $(m-1)$ti habens formam $x^{m-1} + Ax^{m-2} + Bx^{m-3} - - - - + Rx^2 + Sx + T$ (§. 82.). Quodsi igitur iste quotus pariter evanesceret a substituto η, idem hic quotus $x^{m-1} + Ax^{m-2} - - - - + T$ absque residuo divisibilis esset per $x - \eta$ (§. 80) atque tum novus quotiens haberet formam $x^{m-2} + \mathfrak{A}x^{m-3} + \mathfrak{B}x^{m-4} - - - - + \mathfrak{T}$ (§. 83.). Ergo esset $\frac{X}{x-\eta} = (x^{m-2} + \mathfrak{A}x^{m-3} + \mathfrak{B}x^{m-4} + - - - + \mathfrak{T})(x-\eta)$ et $X = (x^{m-2} + \mathfrak{A}x^{m-3} + \mathfrak{B}x^{m-4} - - - - + \mathfrak{T})(x-\eta)(x-\eta)$ unde æquatio X duas haberet radices æquales, *contra hyp.* Denique quotus $\frac{X}{x-\eta}$ non fit $= 0$ nisi evanescente numeratore. Si itaque aliud quaddam quantum π substitutum efficiat, ut sit $\frac{X}{x-\eta} = 0$, foret π radix æquationis $X = 0$ *contra hyp.* Est igitur $\frac{X}{x-\eta}$ æquatio gradus $(m-1)$ti, in qua numerus radicum unitate deficit a numero radicum æquationis X, si hujus radices omnes sunt inæquales.

Si æquatio $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} - - - + t = 0$ *habet radices* $\alpha, \beta, \gamma, - - - \zeta$ *inæquales et præterea* n *radices æquales* η; *ea divisibilis erit absque residuo per* $(x-\eta)^n$, *et quotus erit æquatio gradus* $m - n$ *habens*

bens formam $x^{m-n} + Ax^{m-n-1} + Bx^{m-n-2} + \ - \ - \ -$ $+ T$. Hæc propositio manifesta est ex §§. 80 et 82.

Hac igitur sub hypothesi æquatio habet formam $(x^{m-n} + Ax^{m-n-1} + Bx^{m-n-2} \ - \ - \ - + T)(x-\eta)^n$. Quæ si littera X denotetur, atque per $x-\eta$ dividatur, dico quotum $\frac{X}{x-\eta}$, esse æquationem gradus $(m-1)$ti cujus radices sunt α, β, γ, - - - ζ, et insuper $(n-1)$ radices æquales η. Nam quotus invenietur absque residuo (§. 80.) et proinde alteruter saltem factorum ipsius X absque residuo divisibilis erit per $x-\eta$, quod cum de factore $(x-\eta)^n$ per se pateat, de altero factore idem statui non posse, sequenti modo probatur. Sit factor $x^{m-n} + Ax^{m-n-1} \ - \ - \ - + T$ per $x-\eta$ absque residuo divisibilis et instituatur divisio, quotus habebit formam $x^{m-n-1} + Ax^{m-n-2} \ - \ - \ - + T$, eritque

$$\frac{X}{x-\eta} = (x^{m-n-1} + Ax^{m-u-2} \ - \ - \ - + T)(x-\eta)^n.$$

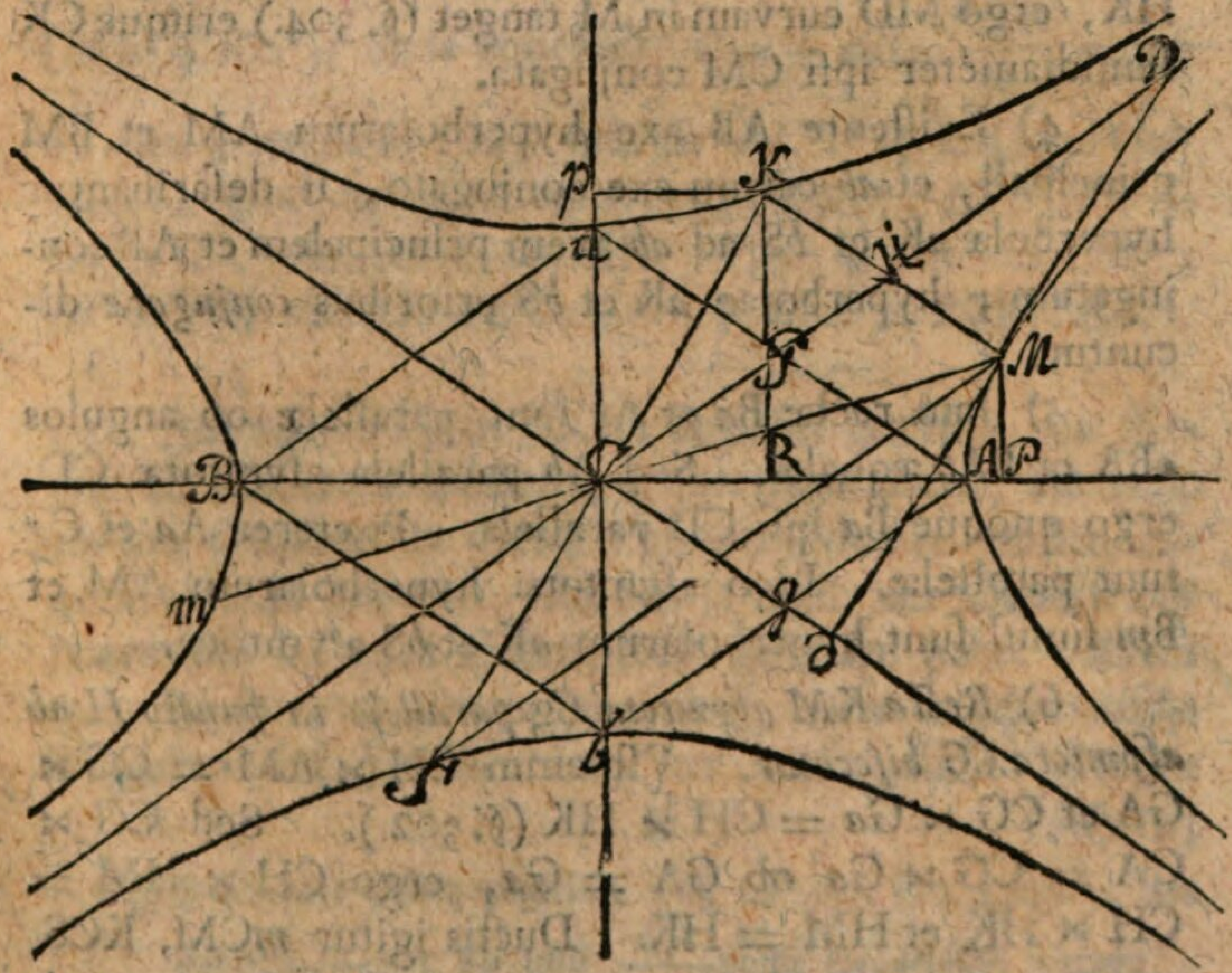
Ergo $X = (x^{m-n-1} + Ax^{m-n-2} \ - \ - \ - + T)(x-\eta)^{n+1}$ ergo X haberet radiees æquales numero $n+1$ contra hyp. Ideo quoque in casu quorundam radicum æqualium quotus $\frac{X}{x-\eta}$ est æquatio gradus $m-1$, in qua numerus radicum unitate deficit a numero radicum æquationis X.

In den §§. 152. und 154. habe ich wiederum zwey Figuren, die ich im MS. mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet hatte, in eine zusammen gezogen, da ich die Zeichnungen ins reine brachte. Daher komt es, daß die im 152. §. gebrauchten Buchstaben mit den Buchstaben der Figur nicht übereinstimmen, weil ich sie zu ändern vergessen habe. Durch Zusammenhaltung der Figur mit der Ausführung wird man die nöthige Aenderung leicht finden. S. 445. mus auch stat §. 120. Geom. Elem. gelesen werden §. 63.

§. 63. und F. 235. 236. 237. ſtat F. 10. 11. 12. ſo wie es auf dem Rande richtig angemerkt iſt.

Die Proportion AP. PB : $CA^2 + CR^2 = PM^2$: KR^2, woraus im 297. §. der Beweis geführet wird, iſt nicht bewieſen, und der aus der Acht gelaſſene Beweis kan am füglichſten aus den Lehren von den Aſymtoten der Hyperbel geführet werden, die in den §§. 298 - 306. vorkommen. Es müſte alsdann der 297. §. der 306ſte werden, und die §§. 298 bis 306. wären alsdenn in der Ordnung 297 bis 305. fortzuzählen. Stat deſſen alſo, was im Anfange des §phi bis auf die Worte: habemus AP × PB : $CA^2 + CR^2 = PM^2 : KR^2$ geleſen wird, wäre folgendes einzurücken.

1) Concluſiones in §. 298. ex æquatione $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$ deductæ quoque veræ manent, denotante *a* quamcunque ſemidiametrum hyperbolæ CM et *b* ejus ſemiconjugatam CK, ſi abſciſſæ *x* in diametro CM



capiantur et applicatæ y conjugatæ CK sint parallelæ. Posito $x = \infty$ fiet $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$. Recta igitur D$d$ hyperbolam in M tangente, si capiatur MD $= b =$ Md, erunt CD et Cd hyperbolarum asymtotæ.

2) Datis asymtotis, si ducatur per centrum C cum tangente Dd parallela KS, praeterea MS cum asymtota CD et MK cum altera asymtota Cd parallela, erit KS diameter ipsi Mm conjugata. Est enim CK $=$ Md et CS $=$ MD.

3) Datis itaque asymtotis CD et Cd cum hyperbolæ puncto quodam M, duæ ipsius diametri conjugatæ sic inveniuntur. Ex puncto M educatur MH uni asymtotæ Cd parallela, quæ secabit alteram in puncto H. Fiat HK $=$ HM, atque ducantur CK et CM, quæ erunt semidiametri conjugatæ quæsitæ. Agatur enim MD ipsi CK parallela, erit triangulum CHK triangulo MHD congruens, ideoque HD $=$ HC, quia MH $=$ HK, ergo MD curvam in M tanget (§. 304.) eritque CK semidiameter ipsi CM conjugata.

4) Existente AB axe hyperbolarum AM et BM principali, et ab earum axe conjugato, si describantur hyperbolæ aK et bS ad ab axem principalem et AB conjugatum; hyperbolae aK et bS prioribus *conjugatæ* dicuntur.

5) Jam rectæ Ba et Ab sunt parallelæ ob angulos aBA et BAb æquales. Sed Ab parallela asymtotæ CD, ergo quoque Ba ipsi CD parallela. Præterea Aa et Cg sunt parallelæ. Ideo asymtotæ hyperbolarum AM et Bm simul sunt hyperbolarum aK et bS asymtotæ.

6) *Recta KM asymtotæ Cg parallela in puncto H ab asymtota CG bisecatur.* Est enim CH $\times$ AM $=$ CG $\times$ GA et CG $\times$ Ga $=$ CH $\times$ HK (§. 302.). Sed CG $\times$ GA $=$ CG $\times$ Ga ob GA $=$ Ga, ergo CH $\times$ HM $=$ CH $\times$ HK et HM $=$ HK. Ductis igitur mCM, KCS, erit

erit Mm diameter hyperbolarum AM, Bm, et KCS ipsius conjugata. (per n. 3.). Locus itaque omnium punctorum extremorum earum, quæ hyperbolarum AM et Bm diametris realibus conjugatæ sunt diametrorum, est in hyperbolis prioribus conjugatis aK et bS.

7) Jam hyperbolarum AM et Bm semiaxis principalis CA sit $= a$ et semiconjugatus C$a = b$; pro his hyperbolis posita CP $= x$ et PM $= y$, habetur æquatio $yy = -bb + \frac{bbxx}{aa}$, vel $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, unde analogia $yy : (x-a)(x+a) = bb : aa$, id est $PM^2 : AP \times PB = Ca^2 : CA^2$. Aequatio vero pro hyperbolis aK et bS est $zz = -aa + \frac{aauu}{bb}$, existente C$p$ = KR $= u$ et pK = CR $= z$, vel $uu = -aa + \frac{aazz}{bb}$, permutatis coordinatis si CR $= p$K ponatur $= u$, et KR $=$ C$p = z$, (ut in §. 160*), unde concluditur $uu + aa = \frac{aazz}{bb}$, atque $zz : uu + aa = bb : aa$, vel $KR^2 : CA^2 + CR^2 = Ca^2 : CA^2$, quæ analogia cum priori $PM^2 : AP \times PB = Ca^2 : CA^2$ comparata dat $KR^2 : CA^2 + CR^2 = PM^2 : AP \times PB$, vel $AP \times PB : CA^2 + CR^2 = PM^2 : KR^2$.

Im 26. Abschnitt bin ich bemühet gewesen, die Regeln der Differentialrechnung solcher Funktionen, die mehr als eine veränderliche Grösse enthalten, in der grösten Algemeinheit zu beweisen, weil ich so algemeine Beweise bey keinem mir bekanten Schriftsteller gefunden habe. Allein wenn ich im 413. §. annehme, daß, wenn mathematische Aufgaben auf Funktionen mehrer veränderlichen Grössen

 führen;

* Ich erinnere hiebey zugleich, daß S. 452. Z. 1. 8 und 9. das Zeichen — vor bb und $\frac{qb}{2}$ müsse weggelöscht werden.

führen; solche veränderliche Grössen insgesamt von einer einzigen veränderlichen Grösse abhängen; so scheinet dieses die Begriffe von den Funktionen mehrer veränderlichen Grössen zu sehr einzuschränken. Ist z eine Funktion zweyer veränderlichen Grössen x und y, so darf man eigentlich nicht annehmen, daß x und y allemahl so von einander abhängen, daß y zugleich mit geändert wird, wenn x eine Aenderung leidet. Wenn x, y und z die drey Coordinaten sind, durch deren Gleichung die Natur einer Oberfläche ausgedrükt wird; so mus für jegliche beliebige Werthe von x und y der Werth von z bestimt werden können, und der Werth von x allein bestimt so wenig den Werth von y, als den von z. Es ist wilkührlich, was bey einem angenommenen Werth von x, die Grösse y für einen Werth haben soll. Allein wenn gleich y in solchen Fällen keine functio regularis oder coutinua von x ist, so bleibt y doch von x eine functio irregularis oder discontinua. Wenn also gleich mein Vortrag dadurch zu sehr würde eingeschränkt werden, wenn ich annehmen wolte, es hiengen in einer Funktion mehrer veränderlichen Grössen x, y, z, u, u.s.w. alle diese Grössen beständig von einer gewissen veränderlichen Grösse t als functiones regulares ab; so wird doch der Vortrag die erforderliche Algemeinheit behalten, alle Folgen werden richtig bleiben, wenn ich die functiones irregulares nicht ausschliesse, und annehme, es können die variabiles x, y, z, u, u. s. f. wenigstens als functiones irregulares einer veränderlichen Grösse t angesehen werden, so daß für einen bestimten Werth von x die übrigen insgesamt wilkührliche Werthe erhalten.

Trüge man indessen Bedenken, die functiones irregulares in der Analysi Betrachtung zu ziehen, die man doch bey vielen wichtigen Aufgaben in Betrachtung zu ziehen nicht umhin kan; so würde dennoch die ganze von mir vorgetragene Theorie mit einer geringen Veränderung beybehalten werden können. Es würde nemlich auf folgende Betrachtungen ankommen.

Wenn

Wenn eine Funktion mehrer veränderlichen Grössen die algemeinste Form hat, so ist sie ein Aggregat von homogenen Funktionen eben dieser veränderlichen Grössen, die von der Abmessung 0 bis auf jede folgende steigen können. So hat die Funktion, zweyer veränderlichen Grössen diese algemeine Form: $V = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \vartheta x^2 y + \iota xy^2 + \varkappa y^3$ u. s. w. Sol $V = 0$ werden, wenn x und y zugleich $= 0$ werden, so mus $\alpha = 0$ seyn, und der Anfang der Reihe eine homogene Funktion der ersten Abmessung seyn. Sind nun β und γ nicht $= 0$, so nähert sich das Verhältnis $\frac{V}{\beta x + \gamma y} = 1 + \frac{\delta x^2 + \varepsilon xy \zeta y^2}{\beta x + \gamma y}$ $+ \frac{\eta x^3 + \vartheta x^2 y + \iota xy^2 + \varkappa y^3}{\beta x + \gamma y}$ + u. s. f. der Gleichheit, wenn x und y abnehmen, da dann für $x = 0 = y$, $\frac{V}{\beta x + \gamma y} = 1$ wird, welches die Gleichung $V = \beta x + \gamma y$ alsdann sagen wil. Die Funktionen V und $\beta x + \gamma y$ verschwinden mit dem Verhältnisse der Gleichheit. Man wird nach diesen Grundsätzen die Schlüsse des §. 415 und 416, wenn man es für nöthig halten solte, leicht verändern können.

Was die Integration der Differentialgleichungen betrift, wenn die veränderlichen Grössen in denselben separirt sind, so habe ich zwar von der algemeinen Methode solche Gleichungen von der Form $\int X dx = \int Y dy$ zu construiren, wenn eins von diesen Integralen, oder beyde sich nicht algebraisch ausdrükken lassen, in den §. 450-452. zulänglich gehandelt. Allein der Fal hätte besonders angemerkt, und die besondre Methode zu integriren noch gelehret werden sollen, wenn diese Integrale von der Quadratur der Hyperbel oder des Cirkels abhangen, weil sich alsdann oft sehr leicht eine algebraische Gleichung zwischen x und y ergiebt. Dieses geschiehet nemlich allemahl, wenn beyde Integrale Logarith-

men,

men, oder beyde Cirkelbogen, und beyde commensurabel sind. Dergleichen wäre z. E.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

welches $lx = ly + C$ giebt,
wenn hier $y = 0$ seyn soll für $x = 0$, so wird $1 = 1 + C$, und also $C = 0$, folglich $x = y$.

Wenn überhaupt $\frac{dx}{x} = \frac{mdy}{y}$

so ist $lx = mly + C$

Ist nun $y = b$ für $x = a$, so wird

$$la = mlb + C$$

oder $la = lb^m + C$

also $C = la - lb^m$

und $lx - la = ly^m - lb^m$

oder $l\frac{x}{a} = l\frac{y^m}{b^m}$

folglich $\frac{x}{a} = \frac{y^m}{b^m}$,

oder $\frac{b^m}{a}x = y^m$.

Wäre $\frac{dx}{x} = \frac{mdy}{1 - yy}$, so hätte man

$$lx = m.\,l\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} + C = l\frac{(1+y)^{\frac{m}{2}}}{(1-y)^{\frac{m}{2}}} + C$$

und $C = 0$, wenn $y = 0$ für $x = 1$.

also $x = \frac{(1+y)^{\frac{m}{2}}}{(1-y)^{\frac{m}{2}}}$, oder $xx = \frac{(1+y)^m}{(1-y)^m}$.

Wenn

Wenn $\frac{du}{\sqrt{(1-uu)}} = \frac{mdz}{\sqrt{(aa-zz)}}$,

so ist $A\,sin.\,u = m\,A\,sin.\frac{z}{a} + E.$

Daß diese Gleichung algebraisch werde, wenn m eine rationale Zahl ist, findet man, wenn man die Zirkelbogen als unmögliche Logarithmen betrachtet. Da dann die Methode solche Gleichungen zu integriren, wenn beyde Theile von der Quadratur des Cirkels abhängen, auf die vorige gebracht wird, wenn beyde von der Quadratur der Hyperbel, oder Construction der logarithmischen Linie abhängen.

Ist nemlich $\frac{du}{\sqrt{(1-uu)}} = \frac{mdz}{\sqrt{(aa-zz)}}$, so wird

$l(u\sqrt{-1}+\sqrt{(1-uu)}) = ml(z\sqrt{-1}+\sqrt{(aa-zz)}+E.$

Wenn nun $z=c$ wird für $u=1$, so hat man

$l\sqrt{-1} = 4ml(c\sqrt{-1}+\sqrt{(aa-cc)})+E,$

oder $4\,l\sqrt{-1} = 4ml(c\sqrt{+1}+\sqrt{(aa-cc)})+E$

$l(\sqrt{-1})^4 = l1 = 0 = 4ml(c\sqrt{-1}+\sqrt{(aa-cc)})+4E,$

also $E = -ml(c\sqrt{1}+\sqrt{(aa-cc)})$

und $l(u\sqrt{-1}+\sqrt{(1-uu)}) = ml(z\sqrt{-1}+\sqrt{(aa-zz)}) - ml(c\sqrt{-1}+\sqrt{(aa-cc)})$

$$l(u\sqrt{-1}+\sqrt{(1-uu)}) = l\frac{(z\sqrt{-1}+\sqrt{(aa-zz)})^m}{(c\sqrt{-1}+\sqrt{(aa-cc)})^m}.$$

daher $e^{\sqrt{-1}.A\,sin.\,u} = \frac{z\sqrt{-1}+\sqrt{(aa-zz)})^m}{c\sqrt{-1}+\sqrt{(aa-bc)})^m}$,

Ferner ist $-1.l(\sqrt{(1-uu)}+u\sqrt{-1}) = -1.$

$$l\frac{(\sqrt{(aa-zz)}+z\sqrt{-1})^m}{(\sqrt{(aa-cc)}+c\sqrt{-1})^m}$$

oder $l(\sqrt{(1-uu)}+u\sqrt{-1})^{-1} = l\frac{(\sqrt{(aa-zz)}-z\sqrt{-1})^m}{(\sqrt{(aa-cc)}-c\sqrt{-1})^m}$

Aber $(\sqrt{(1-uu)}+u\sqrt{-1})^{-1} = \sqrt{(1-uu}-u\sqrt{-1}) = e^{-\sqrt{-1}.A\,sin\,u}$

also $e^{-\sqrt{-1}\,A\,sin\,u} = \frac{(\sqrt{(aa-zz)}-z\sqrt{-1})^m}{(\sqrt{(aa-cc)}-c\sqrt{-1})^m}$,

und $\frac{e^{\sqrt{-1}\,.\,A\,sin\,u} - e^{-\sqrt{-1}\,.\,A\,sin\,u}}{2\sqrt{-1}} = u$

$$= \left(\frac{(\sqrt{(aa-zz)}+z\sqrt{-1})^m}{(\sqrt{(aa-cc)}+c\sqrt{-1})^m} - \frac{(\sqrt{(aa-zz)}-z\sqrt{-1})^m}{(\sqrt{(aa-cc)}-c\sqrt{-1})^m}\right) : 2\sqrt{-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{aa-cc})-c\sqrt{-1})^m(\sqrt{(aa-zz)}+z\sqrt{-1})^m - (\sqrt{(aa-cc)}+c\sqrt{-1})^m(\sqrt{aa-zz}-z\sqrt{-1})^m}{2A^{2m}\sqrt{-1}}$$

Dieser Ausdruk wird algebraisch, wenn m eine rationale Zahl ist, indem so dann die unmöglichen Grössen wegfallen.

In Ansehung dessen, was von der Integration der Differentialgleichungen, die drey oder mehrere veränderliche Grössen enthalten im §. 438. u. f. imgleichen von dem criterio integrabilitatis solcher Gleichungen im §. 435. ist gelehret worden, mus ich noch folgende Erinnerung hinzufügen. Wenn man bey Auflösung mathemathischer Aufgaben auf solche Differentialgleichungen komt, die mehrere veränderliche Grössen enthalten, so kan es seyn, daß eine solche Gleichung allein schon die Auflösung einer Aufgabe enthält, und also die Frage darauf ankomt, was die eine veränderliche Grösse, z zum Exempel, für eine Funktion der übrigen y, x, u, u. s. f. seyn müsse, wo y, x, u, u. s. w. nicht von einander abhängen, sondern eine jede wilkührlich angenommen werden kan. In diesem Fal ist die Auflösung nicht immer möglich, sondern die Frage kan zuweilen etwas ungereimtes in sich fassen, wenn das im 435. §. erwiesene criterium integrabilitatis bey einer Gleichung dreyer veränderlichen Grössen nicht stat hat, und eine solche Gleichung sol allein schon die Auflösung einer Aufgabe enthalten, so ist die Aufgabe ungereimt, und es läst sich keine Auflösung davon geben. Es kan aber zweytens auch seyn,

das

daß aus den Bedingungen einer Aufgabe, bey welcher mehr als zwey veränderliche Grössen zu betrachten vorkommen, mehrere solche Differential-Gleichungen, die mehr als zwey veränderliche Grössen enthalten, geschlossen werden, die zusammen genommen die Auflösung der Aufgabe geben. Sind in solchen Fal soviel Gleichungen da, als veränderliche Grössen weniger eine, so hängen alle diese veränderliche Grössen von einander ab, und jede derselben ist eine Funktion einer jeden der übrigen. In solchen Fällen kan kein criterium integrabilitatis von der Art wie das vorige war in Betrachtung kommen, sondern die Auflösung der Aufgabe ist immer möglich. Es komt nemlich alsdann darauf an, daß man durch Hülfe der mehrern Gleichungen eine veränderliche Grösse nach der andern eliminire, bis man auf eine Gleichung von zweyen veränderlichen Grössen komt. Ein Exempel kan die Aufgabe abgeben, welche in andrer Absicht von mir S. 149. dieser Schrift augeführet ist, und welche diese zwey Fundamentalgleichungen giebt.

$$\frac{2ddx}{dt^2} = -\frac{Vxt}{r} \text{ und } \frac{2ddy}{dt^2} = -\frac{Vy}{r}, \text{ wo } r =$$

$\sqrt{}(xx+yy)$ und V eine Funktion von r ist. Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch y, und die zweyte durch x, so erhält man

$$\frac{2yddx}{dt^2} = -\frac{Vyx}{r}, \text{ und } \frac{2xddy}{dt2} = -\frac{Vyx}{r},$$

$$\text{also } \frac{2yddx}{dt2} = \frac{2xddy}{dt2}$$

$$\text{oder } \frac{yddx - xddy}{dt^2} = 0,$$ also durch die Integration $ydx - xdy = adt$.

Man multiplicire weiter die erste Gleichung durch dx, und die zweyte durch dy, so wird

$$\frac{2dxddx}{dt^2}$$

$$\frac{2dxddx}{dt^2} = -\frac{Vxdx}{r}$$

und $\frac{2dyddy}{dt^2} = -\frac{Vydy}{r}$, also durch die Addition $\frac{2dxddx + 2dyddy}{dt2} = -\frac{V(xdx + ydy)}{r}$.

Es ist aber $rr = xx + yy$

also $rdr = xdx + ydy$

und $dr = \frac{xdx + ydy}{r}$.

Daher, wird $\frac{2dxddx + 2dyddy}{dt^2} = -Vdr$

welche Gleichung integrabel ist, weil V eine Funktion ist von r. Man hat aber nach der Interation $\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = b - \int Vdr$.

Aus dieser Gleichung mit der andern $ydx - xdy = adt$ zusammen genommen, mus man eine veränderliche Grösse eliminiren, bevor die Integration weiter von statten gehen kan. Aus der ersten $ydx - xdy = adt$ hat man

$ydx - adt = xdy$, und

$$dy = \frac{ydx - adt}{x}$$

also $dy^2 = \frac{yydx^2 - 2aydxdt + aadt^2}{xx}$

und $dx^2 + dy^2 = \frac{xxdx^2 + yydx^2 - 2aydxdt + aadt^2}{xx}$

oder $dx^2 + dy^2 = \frac{rrdx^2 - 2aydxdt + aadt^2}{xx}$.

Dies in der zweyten Gleichung substituirt, giebt

$$\frac{rrdx^2 - 2aydxdt + aadt^2}{xx} = (b - \int Vdr)dt^2$$

rrdx²

$$rrdx^2 - 2aydxdt + aadt^2 = xx(b - \int Vdr)dt^2$$

$$r^4dx^2 - 2aydtrrdx + rraadt^2 = rrxx(b - \int Vdr)\,dt^2$$

$$r^4dx^2 - 2aydtrrdx + aayydt^2 + aaxxdt^2 = rrxx(b - \int Vdr)\,dt^2$$

$$r^4dx^2 - 2aydtrrdx + aayydt^2 = rrxx(b - \int Vdr)dt^2 - aaxxdt^2$$

$$rrdx - aydt = xdt\sqrt{(rr(b - \int Vdr) - aa)}$$

und also $dx = \frac{aydt + xdt\sqrt{(rr(b - \int Vdr) - aa)}}{rr}$.

Daher schliest man ferner

$$dy = \frac{y}{x}dx - \frac{adt}{x}$$

$$= \frac{ayydt + xydt\sqrt{(rr(b - \int Vdr) - aa)}}{rrx} - \frac{axdt}{xx}$$

$$= \frac{ayyxdt + xxydt\sqrt{(rr(b - \int Vdr) - aa)} - arrxdt}{rrxx}$$

$$= \frac{ayyxdt + xxydt\sqrt{(rr(b - \int Vdr) - aa)} - ayyxdt - ax^3dt}{rrxx}$$

$$= \frac{-axdt + ydt\sqrt{(rr(b - \int Vdr) - aa)}}{rr}.$$

Weil also $xdx = \frac{ayxdt + xxdt\sqrt{(rr(b - \int Vdr) - aa)}}{rr}$

und $ydy = \frac{-ayxdt + yydt\sqrt{(rr(b - \int Vdr) - aa)}}{rr}$

so wird $xdx + ydy = rdr = dt\sqrt{(rr(b - \int Vdr) - aa)}$

und $dt = \frac{rdr}{\sqrt{(rr(b - \int Vdr) - aa)}}$, welche Gleichung r durch t bestimt. Nun war auch

$ydx - xdy = adt$. Hierin den Werth von dt gesetzt, giebt $ydx - xdy = \frac{ardr}{\sqrt{(rr(b - \int Vdr) - aa)}}$

und folglich ist $\frac{ydx - xdy}{xx + yy} = \frac{adr}{r\sqrt{(rr(b - \int Vdr) - aa)}}$

und $A\,tang \frac{x}{y} = \int \frac{adr}{r\sqrt{(rr(b - \int Vdr - aa)}} + c.$

Dies ist eine Gleichung zwischen x und y, weil $r = \sqrt{(xx + yy)}$. Daß also nach geendigten Integrationen der Aufgabe ein völliges Genüge geschehen ist, indem man für jeden gegebenen Werth von t den respondirenden Werth sowohl von x, als von y bestimmen kan.

Die Elimination gehet nicht in allen Fällen so leicht, als in dem gegenwärtigen Fal von staten, und wenn in dieser Absicht keine völlig allgemeine Regeln gegeben werden können, sondern der Geschicklichkeit des geübten Analysten es überlassen werden mus, den kürzesten Weg zur Auflösung zu finden; so wird das vornehmste auf geschickte Transformationen der Gleichungen ankommen, wenn bey der gegebenen Form der Gleichungen die Rechnung gar zu weitläuftig werden solte. Und in dieser Absicht ist vornemlich der Weg anzupreisen, wenn x und y Coordinaten einer krummen Linie sind, wie in dem vorigen Exempel, daß man selbige gleich Anfangs aus der Rechnung wegschaffe, und stat ihrer die Entfernung r nebst einem Winkel einführe, nach der Vorschrift des 194. §. der Math. Anal. Auf diesem Wege werden oft die Rechnungen viel kürzer, und man kan die auf der 146. S. angeführte Abhandlung des Herrn Eulers zu rathe ziehen, um davon ein Beyspiel zu haben.

Endlich muß ich noch etwas von der Methode, solche Gleichungen zu integriren, hinzufügen, worin die veränderliche Grösse ein Cirkelbogen ist; da dann nebst dem Differential des Cirkelbogens in der Gleichung wenigstens eine dem Bogen zugehörige trigonometrische Linie vorkommen muß. Es hätte hievon im XXV. Abschnitt etwas vollständiger sollen gehandelt seyn. Es sey die Differen-

tial-

tial-Gleichung $dz = \frac{dv\sqrt{(aa - bb)}}{a + b\cos. v}$ gegeben, man soll sie integriren. Die veränderlichen Grössen z und v sind Zirkelbogen. In Formuln von dieser Art muß man des Bogens v differential dv durch das Differential einer dem Bogen v zugehörigen trigonometrischen Linie ausdrücken, und durch eben diese Linie auch die trigonometrische Linie eben desselben Bogens, die in der gegebenen Formul vorkomt, wie im gegenwärtigen Fall cos. v ist, damit man, wo möglich, einen Ausdruck bekomt, worin nur eine veränderliche Linie mit ihrem Differential befindlich ist. Die Tangente ist gemeiniglich dazu am bequemsten. Man setze also tang v = T, so ist v = A tang T und $dv = \frac{dT}{1 + TT}$, ferner wird $\cos v = \frac{1}{\sqrt{(1 + TT)}}$, und also, wenn man der Kürze wegen $\sqrt{(aa - bb)} = C$ setzt, wird

$$dz = \frac{\frac{CdT}{1+TT}}{a + \frac{b}{\sqrt{(1 + TT)}}} = \frac{CdT}{a(1+TT)+b\sqrt{(1+TT)}}$$

Dieser Ausdruck ist wegen der darin vorkommenden Irrationalgrösse noch nicht füglich zu integriren. Man kan in diesem Fall einen von der Irrationalität freyen Ausdruck bekommen, wenn man statt der Tangente des Bogens v die Tangente seiner Helfte in die Formul bringt. Es sey nemlich $t = \tan \frac{1}{2} v$, so ist $T = \frac{2t}{1 - tt}$; $\sqrt{(1+TT)} = \frac{1 + tt}{1 - tt}$, und $dT = \frac{2dt(1 + tt)}{(1 - tt)^2}$. Also dz =

$$\frac{C\frac{2dt(1 + tt)}{(1 - tt)^2}}{a\frac{(1 + tt)^2}{(1 - tt)^2} + b\frac{1 + tt}{1 - tt}} = \frac{2Cdt(1 + tt)}{a(1 + tt)^2 + b(1 + tt)(1 - tt)}$$

$$=\frac{2Cdt}{a(1+tt)+b(1-tt)}=\frac{2Cdt}{a+b+(a-b)tt}=\frac{\frac{2C}{a-b}dt}{\frac{a+b}{a-b}+tt},$$

welches Differential nach der Methode des 362. §. sich integriren läst. Es wird nemlich

$$z=\frac{2\sqrt{(aa-bb)}}{a+b}\cdot\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\cdot A\,\mathrm{tang}\frac{t\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(a+b)}},$$ wenn man nemlich den Werth $\sqrt{(aa-bb)}$ stat C wieder restituirt, oder $z=2\,A\,\mathrm{tang}\,\frac{t\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(a+b)}}$: Also $\frac{1}{2}z=A\,\mathrm{tang}\,\frac{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}v\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(a+b)}}$, und $\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}z=\frac{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}v\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(a+b)}}$.

Man kan hieraus weiter schliessen $\mathrm{tang}\,z=\frac{2\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}z}{1-(\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}z)^2}$

$$=\frac{2\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}v\sqrt{(a-b)}}{\sqrt{(a+b)}}:\frac{a+b-(\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}v)^2(a-b)}{a+b}$$

$$=\frac{2\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}v\sqrt{(aa-bb)}}{a+b-(a-b)(\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}v)^2}=\frac{\frac{2\sin\frac{1}{2}v}{\cos\frac{1}{2}v}\sqrt{(aa-bb)}}{a+b-(a-b)\frac{(\sin\frac{1}{2}v)^2}{(\cos\frac{1}{2}v)^2}}$$

$$=\frac{\frac{2\sqrt{(1-\cos v)}}{\sqrt{(1+\cos v)}}\sqrt{(aa-bb)}}{a+b-(a-b)\frac{1-\cos v}{1+\cos v}}=\frac{\sin v\sqrt{(aa-bb)}}{a\cos v+b},$$

weil $\sin\frac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1-\cos v}{2}}$ und $\cos\frac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1+\cos v}{2}}$.

Hieraus

Hieraus ergiebt sich auch $\cos z = 1 : \sqrt{(1 + (\tan z)^2)} =$

$$1 : \sqrt{\left(1 + \frac{(\sin v)^2 (aa - bb)}{(a \cos v + b)^2}\right)} = 1 : \sqrt{}$$

$$\frac{(a \cos v + b)^2 + (\sin v)^2 (aa - bb)}{(a \cos v + b)^2} = 1 : \frac{a + b \cos v}{a \cos v + b} =$$

$$\frac{a \cos v + b}{a + b \cos v}, \text{ und } \sin z = \sqrt{(1 - (\cos z)^2)} = \sqrt{\left(1 - \right.}$$

$$\left.\frac{(a \cos v + b)^2}{(a + b \cos v)^2}\right) = \frac{\sin v \sqrt{(aa - bb)}}{a + b \cos v}.$$

Was ich in dem 85. §. der höhern Geometrie von den verschiedenen Graden der Transcendenten Linien vortrage, ist aus der Integralrechnung des Herrn Joh. Bernouilli genommen, die sich in seinen zusammengedruckten Operibus befindet. Bey ihm findet man eben das Exempel einer transcendenten Linie der zweyten Ordnung, nemlich die Gleichung $2axddy^2 - xxddy^2 = dx^4$, welche durch die Reduction und einmahlige Integration auf diese gebracht wird $ady = dx \int \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$. Man wird aber bey genauerer Untersuchung finden, daß in diesem Fall das Integral ay kein Transcendens des zweyten, sondern nur des ersten Grades sey. Denn wenn man nach der Methode des 404. §. der Math. Anal. integrirt, so findet man

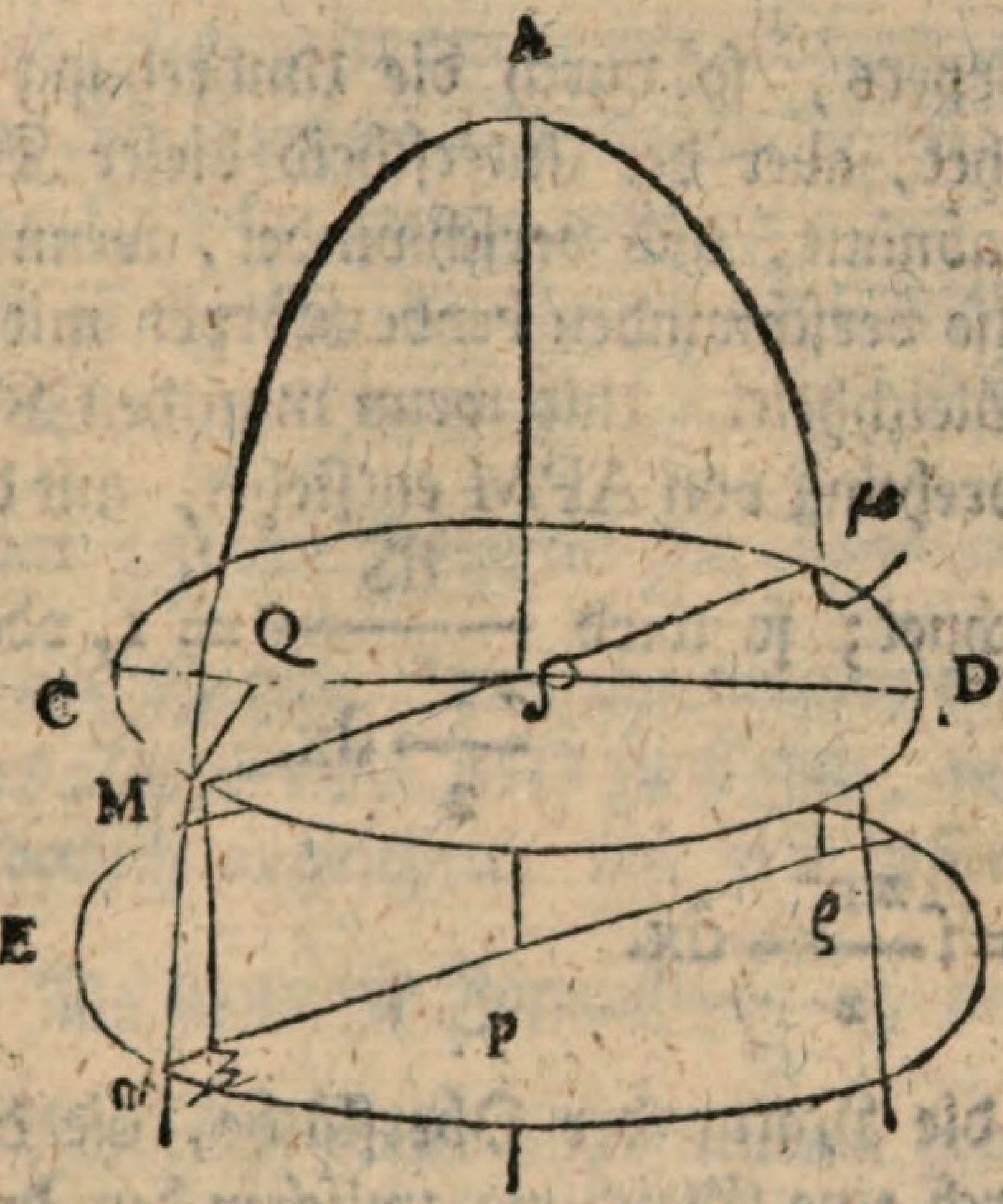
$$ay = x\int \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}} - a\int \frac{xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$$

das ist $ay = (x - a) \int \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}} + a\sqrt{(2ax - xx)}$,

wo das Integral $\int \frac{xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ nach der Methode der 369. §. gesucht ist. Es dependirt also ay ganz allein von

der Quadratur des Cirkels, und ist ein transcendens, der ersten Ordnung. Ueberhaupt, wenn $X = \int Pdx$ ein Transcendens der ersten Ordnung ist, und von der Quadratur einer algebraischen Linie abhängt, so ist auch $\int Xdx$, oder $\int dx \int Pdx$ nur ein Transcendens der ersten Ordnung. Denn es ist $\int Xdx = Xx - \int xdX = x\int Pdx - \int Pxdx$, wo $\int Pxdx$ auch nur ein Transscendens des ersten Grades ist. Wäre aber $dy = \frac{adx}{x} \int \frac{dx}{a-x} = \frac{adx}{x} \, l \frac{a}{a-x}$, so gäbe die vorige Regel $y = alx \int \frac{dx}{a-x} - a \int \frac{dxlx}{a-x}$, da denn $\int \frac{dxlx}{a-x}$ ein Transscendens des zweyten Grades ist. Von der Art, den körperlichen Inhalt und die Oberfläche geometrischer Körper durch die Integralrechnung zu finden, habe ich im Schluß der höhern Geometrie nur kurz gehandelt, und den Vortrag auf runde Körper eingeschränkt. Ich eilte zum Schluß, weil das Buch schon ziemlich stark angewachsen war. Indessen hätte ich billig für den Inhalt der Körper algemeinere Formuln geben sollen, indem diese bey wichtigen Untersuchungen in der practischen Mathematik oft gebraucht werden. Ich wil daher diese Formuln hier noch entwickeln, und den in dem Lehrbuch ins kurze gezogenen Vortrag hier etwas vollständiger auseinander setzen.

Wenn die Beschaffenheit der Oberfläche, die den Körper begränzt, durch eine Gleichung zwischen dreyen Coordinaten ausgedruckt wird, so kan man eine eben so algemeine Formul für die Cubatur der Körper finden, als die Formul $\int ydx \sin\alpha$ ist für die Quadratur der Linien, deren Natur durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten x und y gegeben ist. Ich will diese allgemeine Formul aus den speciellen Methoden herleiten, die in den meisten Lehrbüchern vorkomt, und von mir selbst ist gebraucht worden, den Inhalt runder Körper zu finden. Sie ist diese.



Es sey AM eine krumme Linie, deren Axe AP, und man wil den geometrischen Inhalt eines Körpers wissen, welcher entstehet, wenn die Figur um ihre Axe AP gedrehet wird. Diese Aufgabe wird folgendergestalt aufgelöset. Es wachse AP = x, um die Differenz Pp = Δx, und man richte in den Puncten P und p die rechtwinklichten Ordinaten PM und pm auf, und ziehe MR mit Ap parallel. Es sey PM = r, so ist RM = Δx und Rm = Δr. Wird nun die Figur um die Axe AP gedrehet, so beschreibt das Rechteck PMRp einen Cylinder, der mit dem Stük des runden Körpers, so durch die Figur PMmp beschrieben wird, einerley Grundfläche hat. Es sey das Verhältnis des Halbmessers zur Peripherie des Cirkels = 1 : π, so ist der Umkreis der Grundfläche = πr, und ihr Flächen-Inhalt = $\frac{\pi r^2}{2}$. Multipliciret man diese mit der Höhe

 des

des Cylinders Δx, so findet man seinen körperlichen Inhalt $= \frac{\pi r^2}{2} \Delta x$. Nun ist zwar dieser Cylinder kleiner, als das Stük des Körpers, so durch die Umdrehung der Figur PMmp entstehet, aber der Unterscheid dieser Körper nimt ab, wenn Δx abnimt, und verschwindet, wenn $\Delta x = 0 = dx$ wird. Also verschwinden beyde Körper mit dem Verhältnisse der Gleichheit. Und wenn man den Körper, der durch die Umdrehung von APM entstehet, mit dem Buchstaben S bezeichnet; so wird $\frac{dS}{\frac{\pi r^2}{2} dx} = 1$, oder $\frac{dS}{dx} = \frac{\pi r^2}{2}$, und $S = \int \frac{\pi r^2}{2} dx$.

Wenn die Natur der Oberfläche, die den Körper begränzt, durch eine Gleichung zwischen den dreyen rechtwinklichten Coordinaten $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$ gegeben ist, so findet man die Gleichung für den Cirkel CMD, wenn man in der Gleichung für die Oberfläche $x = AP = b$ setzet; und aus dieser schliest man die Quadratur der Fläche CMD durch Hülfe der Formul $\int z dy$, oder auch, wenn es bequemer ist, durch Hülfe der Formul $\int \frac{1}{2} r . r d\phi$, wo $r = \sqrt{(yy + zz)} = PM$, und $\phi =$ dem Winkel CPM. Also kan man auch die algemeine Differentialformul $\int z dy$ oder $\int \frac{1}{2} r . r d\phi$ stat $\frac{\pi r^2}{2}$ in der vorhin gefundenen $S = \int \frac{\pi r^2}{2} dx$ schreiben, so wird $S = \int dx \int z dy$ oder auch $S = \int dx \int \frac{1}{2} r . r d\phi$, deren Integration ebenfals den gesuchten körperlichen Inhalt geben würde.

Es sey AM die Parabel und ihr Parameter $= 1$, so ist $PM^2 = AP = x$, also $yy + zz = x$. Wenn $x = b$, so ist $yy + zz = b$, die Gleichung für den Cirkel CMD, dessen

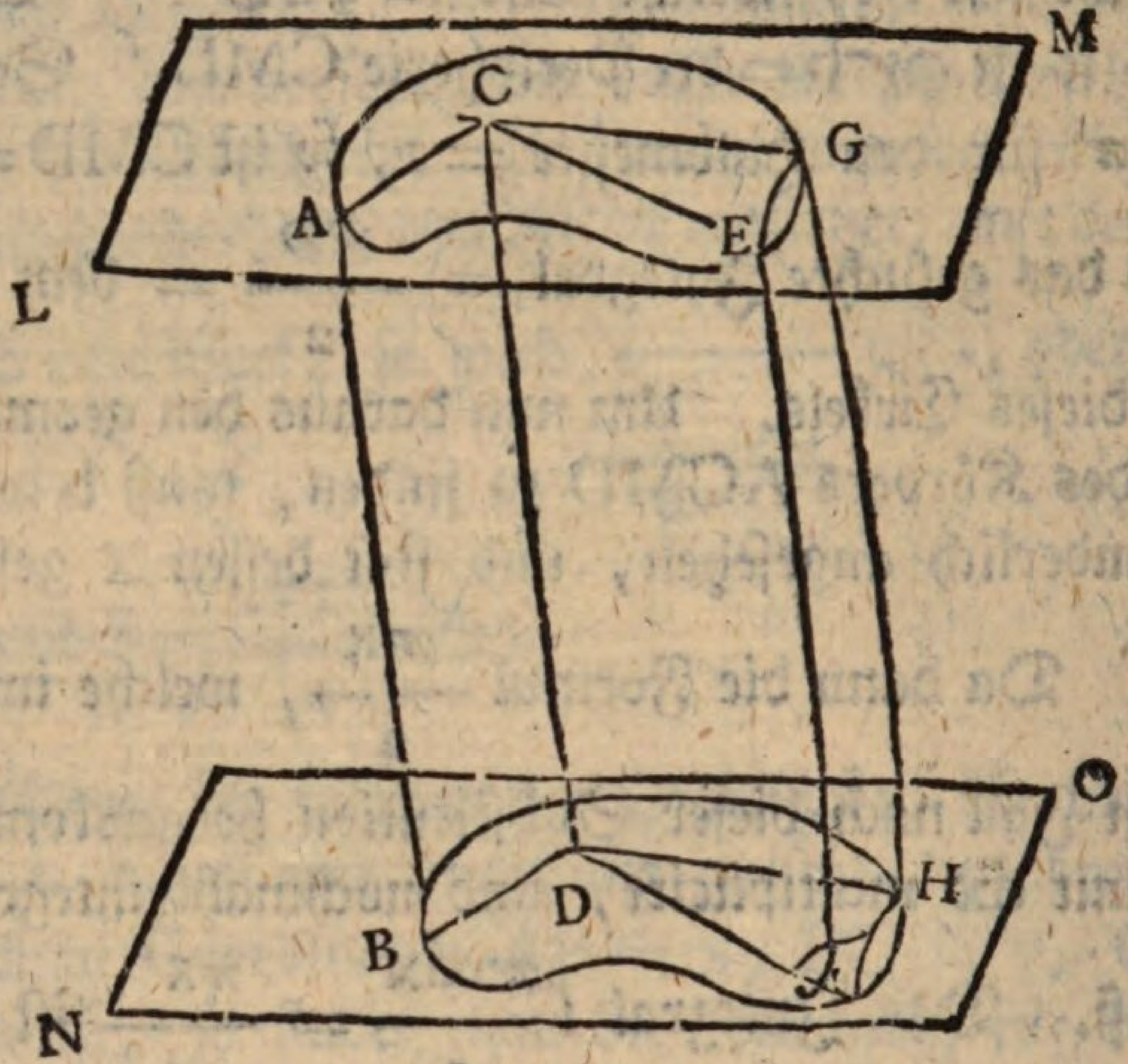
dessen Halbmesser $PM = \sqrt{b}$, und nunmehro läst sich aus der algemeinern Formul $\int dx \int \frac{1}{2} r.r d\phi$ die Cubatur dieses Cörpers so schliessen.

Stat r setzt man im gegenwärtigen Fall $\sqrt{b}$, und so hat man die Formul $\int \frac{1}{2} \sqrt{b}.d\phi \sqrt{b}$ für die Quadratur der Fläche CPM, welche also $= \frac{1}{2} b \phi$. Wenn $\phi = 4R$, so ist $\phi \sqrt{b} =$ der Peripherie CMD. Setzt man diese $= \pi$ für den Halbmesser $= 1$, so ist $CMD = \pi \sqrt{b}$, und also das gesuchte Integral $= \frac{\pi b}{2} =$ dem Flächen Inhalt dieses Cirkels. Um nun daraus den geometrischen Inhalt des Körpers ACMD zu finden, muß b wiederum als veränderlich angesehen, und stat dessen x geschrieben werden. Da dann die Formul $\frac{\pi x}{2}$, welche im gegenwärtigen Fall nach dieser Substitution herauskomt, wiederum mit dx multiplicirt, und nochmahl integrirt werden muß. Das Integral $\int \frac{\pi x dx}{2} = \frac{\pi x^2}{4}$ ist das gesuchte.

Es wird voraus gesetzt, daß die Gleichung für die Oberfläche des Cörpers bekant sey, welche ausdrükt, was x für eine Funktion sey von den veränderlichen Grössen y und z, und so kan man auch die andre Formul $\int dx \int z dy$ gebrauchen. Es ist aber $\int dz = z$, nnd wenn man $\int dz$ stat z in der Formul $\int dx \int z dy$ setzt, so kan eben diese Formul noch algemeiner so ausgedrukt werden $S = \int dx \int dy \int dz$, welche Formul sodann so integrirt werden muß, daß man zuerst allein z veränderlich setzt, darauf y und z, und endlich alle drey x, y und z als veränderlich betrachtet.

Nun behaupte ich, daß diese Formul $\int dx \int dy \int dz$ nicht nur auf die runden Körper eingeschränkt, sondern so algemein sey, daß der körperliche Inhalt eines jeden Körpers nach derselben gefunden werden könne, wenn sich nur die

Oberfläche desselben durch eine Gleichung zwischen drey rechtwinklichten Coordinaten bestimmen läßt. Es wird aber bey diesem Beweise auf folgende Sätze ankommen:



Die beyden Ebenen LM und NO sollen unter einander parallel seyn, und eine grade Linie AB schneidet sie unter einem beliebigen Winkel $= a$. In der obersten LM sey eine krumme Linie, welche man will, beschrieben, deren Umkreis durch den Punkt A gehet. Man stelle sich vor, daß die Figur AEG an der Linie AB beständig in der parallelen Lage mit NO herunter geschoben werde, so daß der Punkt A beständig in der Linie AB bleibt, bis diese Figur in die Ebene NO fällt, so wird der Raum, durch welche sie fortgegangen ist, ein Körper seyn, der von einer Oberfläche eingeschlossen wird, welche die Eigenschaft hat, daß alle Linien, die man mit AB parallel durch Punkte des

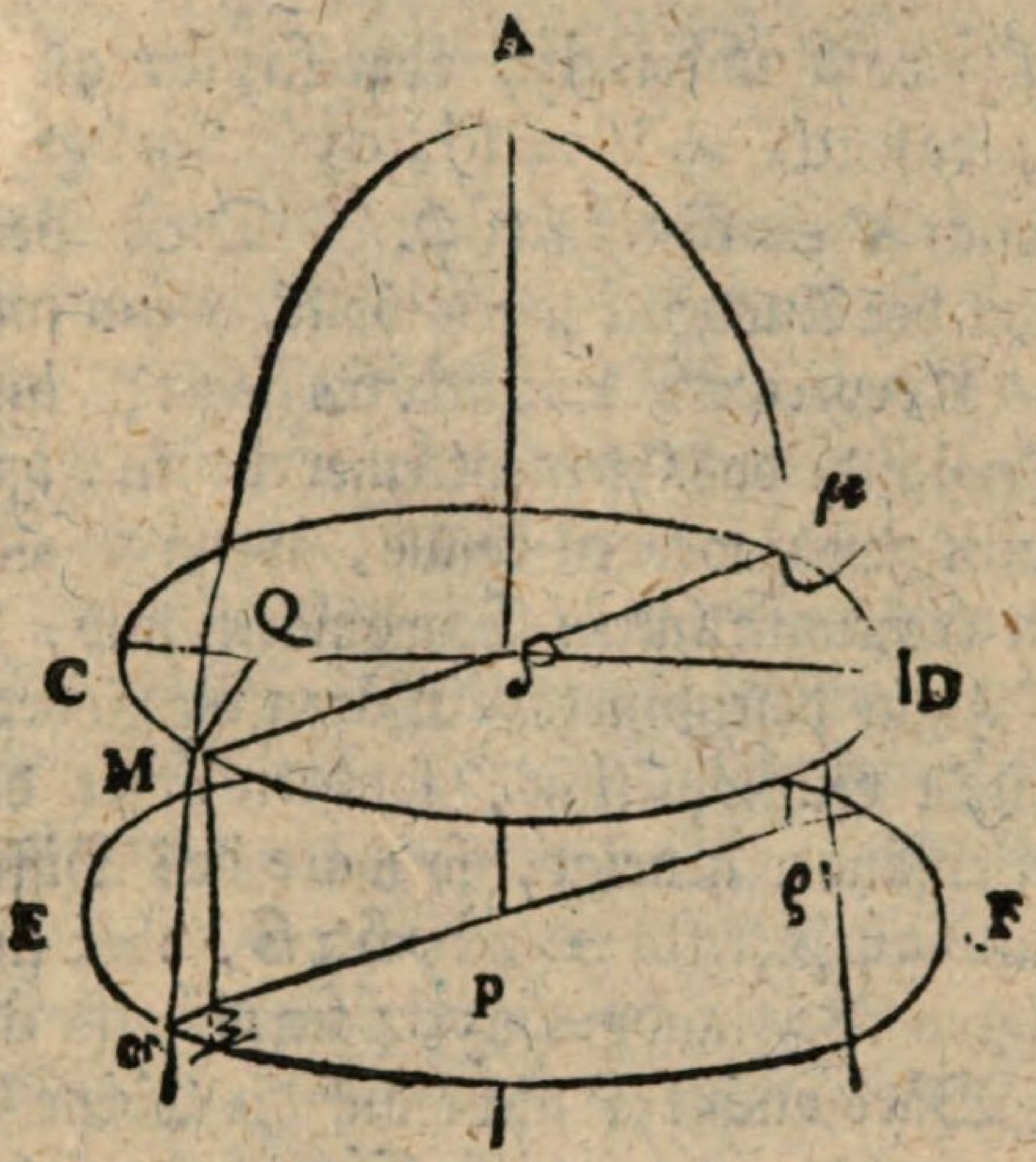
Um-

Umkreises der Figur AEG ziehet, ganz in selbige fallen. Die Figuren AEG und BFH, welche seine Grundflächen heissen, werden parallel, und einander gleich und ähnlich seyn, wie denn auch jeder Schnit, der mit den Grundflächen parallel geschicht, eine Figur geben wird, die den Grundflächen gleich und ähnlich ist. Cörper von dieser Art werden unter dem allgemeinen Nahmen der Cylinder oder säulenförmiger Cörper begriffen, obgleich in den Anfangsgründen der Geometrie nur diejenigen Cylinder betrachtet werden, deren Grundflächen Cirkel sind. Ich behaupte, **der Inhalt eines solchen Cörpers werde gefunden werden, wenn man seine Grundfläche mit der Höhe multiplicirt.**

Man nehme in der einen Grundfläche einen Punkt C, und lege durch die Linie AB und diesen Punkt C eine Ebene ABCD, welche AEG in AC und BFH in BD schneidet, so sind AC und BD parallel. Ziehet man nun in der Ebene ABCD durch C die Linie CD mit AB parallel, so wird die Figur ACDB ein Parallelogramm. Durch einen andern wilkührlichen Punkt E der Linie AEG ziehe man EF mit AB parallel, die folglich auch mit CD parallel seyn, und ganz in der Oberfläche des Cörpers liegen wird. Die Ebene DCEF dieser parallelen CD und EF schneide die Grundflächen in CE und DF, so ist auch DCEF ein Parallelogramm. Der Winkel ACE = BDF sey = φ, und es erhellet sogleich, daß das Stük des Körpers zwischen den Ebenen ACDB und ECDF von dem Winkel φ abhänge. Es sey dieses Stück des Körpers = V und ACE = φ wachse um die Differenz ECG = $\Delta\varphi$, so wächst V um das Stük ECGDFH = ΔV. Die Ebene der Parallelen EF und GH schneidet die Grundflächen iu den graden Linien EG und FH, daß auch EFHG ein Parallelogramm wird, welches mit den beyden andern ECDF und GCDH nebst den Triangeln CEG und DFH eine Prisma einschliesset, dessen Inhalt gefunden wird, wenn man seine

seine Grundfläche mit der Höhe multiplicirt. Es sey AB $= a$, so ist die Höhe $= a \sin \alpha$. Ferner sey CE $= z$, so ist der Triangel CEG als die Grundfläche des erwehnten Prisma $= \frac{1}{2}(z \pm \Delta z) \sin z \Delta \phi$, und der körperliche Inhalt desselben $= \frac{1}{2}(z \pm \Delta z) \sin z \Delta \phi a \sin \alpha$. Je kleiner der Winkel ACE $= \Delta \phi$ angenommen wird, desto mehr nähert sich das Verhältnis dieses Prisma zu ΔV der Gleichheit, und wenn der Winkel $\Delta \phi$ verschwindet, so verschwinden beyde Körper mit dem Verhältnisse der Gleichheit, daß also auf dem Fall $\frac{dV}{\frac{1}{2}z.zd\phi a \sin \alpha} = 1$ wird, und $\frac{dV}{d\phi} = \frac{1}{2}z.zd\phi a \sin \alpha$. Also ist $\int dV = V = a \sin \alpha \int \frac{1}{2}z.zd\phi$. Dies giebt den Inhalt des ganzen Körpers, wenn $\phi = 4R$, und alsdenn ist $\int \frac{1}{2}z.zd\phi =$ der Grundfläche AEG, daß also überhaupt der Inhalt eines jeden Körpers von dieser Art gefunden wird, wenn man seine Grundfläche mit der Höhe multiplicirt.

Dieser Satz rechtfertiget die Algemeinheit der Formuln $\int dx \int \frac{1}{2}r.rd\phi$ und $\int dx \int zdy$, oder $\int dx \int dy \int dz$ für den geometrischen Inhalt der Körper, wenn die Oberfläche derselben durch eine Gleichung zwischen drey rechtwinklichte Coordinaten bestimt ist. Es sey die Natur dieser Oberfläche durch die drey rechtwinklichte Coordinaten AP $= x$, PQ $= y$, und QM $= z$ gegeben,



und AP = x wachse um die Differenz Pp = Δx. Durch p lege man einer Ebene EF mit der Ebene der Coordinaten PQ und QM, welche in dem Körper den Schnit CMD giebt, parallel; so ist das Stück des Körpers, welches zwischen diesen beyden Ebenen enthalten ist = dV, wenn ACMD = V. Durch einen Punkt M des Umkreises der Durchschnitsfigur CMD sey MR mit AP parallel gezogen, welche die Ebene EF in R trift. Man setze, daß CMD an dieser Linie herunter gehe, und beständig die parallele Lage mit EF behalte, bis diese Figur in EF fält, so entsteht der Cylinder MRρμ, dessen Grundfläche CMD, und dessen Inhalt = CMD.Δx. Man siehet sogleich, daß dieser Cylinder, und die Differenz ΔV des Körpers mit dem Verhältnisse der Gleichheit verschwinden, wenn Δx verschwindet, und daß also $\frac{\Delta V}{CMD \cdot dx} = 1$,

oder

oder $\frac{dV.}{dx} = CMD$. Da man nun CMD durch die Formuln $\int \frac{1}{2} r.rd\phi$ und $\int zdy$, oder $\int dy \int dz$ ausdrücken kan, so erhellet, daß $\int dV = V = \int dx \int dy \int dz$ gesetzt werden könne, oder auch $V = \int dx \int \frac{1}{2} r.rd\phi$. Diese Betrachtungen zeigen, was der Ausdruck sagen wolle, wenn man das Element eines Körpers $dV = dxdydz$ setzet, imgleichen in welchem Verstande das Element einer ebenen Figur $= dxdy$ oder $= dydz$ gesetzt werden könne, wenn x und y, oder y und z die rechtwinklichten Coordinaten sind, deren Gleichung diese Figur bestimmet. Wären die Coordinaten PQ und QM nicht rechtwinklicht, sondern unter dem Winkel $= \beta$ gegen einander geneigt, so wäre das Differential der Durchschnitsfigur CMD $= zdy \sin \beta$, oder in dem vorhin angezeigten Verstande $= dydz \sin \beta$, also $dV = dxdydz \sin \beta$. Wäre auch AP nicht auf die Ebene CMD perpendiculär, sondern gegen diese Ebene unter dem Winkel $= \alpha$ geneigt; so wäre der Cylinder $MR\rho\mu = CMD.\Delta x \sin \alpha$, und also $\frac{dV}{dx} = CMD \sin \alpha = \sin \alpha \sin \beta \int ydz$, und $dV = \sin \alpha \sin \beta dx \int ydz$, oder in dem Verstande, der vorhin festgesetzt worden, $dV = dxdydz \sin \alpha \sin \beta$, welches die algemeinste Formul ist, den Inhalt eines Körpers durch die Integralrechnung zu finden, wenn die Natur seiner Oberfläche durch eine Gleichung zwischen drey Coordinaten gegeben worden (*).

(*) Ich behalte mir vor, in der Zukunft auch zur Analytischen, besonders Sphärischen, Trigonometrie noch einige Zusätze beyzufügen.

Zusatz zu der vorigen Abhandlung von der Integralrechnung.

Es ist gewiß, daß $\int x^n dx$ ganz etwas anders sagen wolle, als der Ausdruk Sx^n, und, wenn überhaupt y die Ordinate, x die zugehörige Abscisse einer krummen Linie seyn soll, daß $\int ydx$ etwas ganz anders bedeute, als Sy. Die Summe der Ordinaten ist eigentlich keinesweges einerley mit dem Flächen-Inhalt der krummen Linie. Indessen komt der Analytische Ausdruk, welcher die Summe der Ordinaten giebt, oder der terminus summatorius der Reihe, deren terminus generalis y ist, mit $\int ydx$ unter der Bedingung überein, wenn man voraussetzt, es soll y constant bleiben, und sich noch nicht ändern, wenn x sich nur um dx ändert. Denn es ist überhaupt $Sy = \int ydx + \frac{1}{2} S\frac{dy}{dx} - \frac{1}{6} S\frac{ddy}{dx^2} + \frac{1}{24} S\frac{d^3y}{dx^3}$ — etc. (Eul. Instit. Calc. Diff. Part. Post. Cap. V. §. 109. pag. 407.) bleibet also y constant, wenn x um dx wächset, so werden $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, und folglich alle nach dem ersten folgende Glieder der Reihe, welche Sy algemein ausdrukt, $= 0$, und Sy durch $\int ydx$ auszudrücken seyn. In dieser Bedeutung kan also die Area der Figur die Summe der Ordinaten heissen.

* * * * * * * * * *

Diese Schrift wird unter dem gegenwärtigen Titel nicht weiter fortgesetzt werden. Ich werde mir in Zukunft eine algemeinere Absicht vorsetzen, und unter dem algemeinern Titel: **Mathematische und Physikalische Abhandlungen**, eine Samlung der Arbeiten verschiedener Verfasser dem Druck übergeben. Auf diesem Fal wird

keiner

keiner an des andern Arbeit Antheil nehmen, und ich werde den Aufsätzen, welche nicht von mir selbst herrühren, die Nahmen ihrer Verfasser vorsetzen. Die folgende Abhandlung ist mir von einem meiner künftigen Herrn Mitarbeiter gütigst mitgetheilet worden, und ich habe seine Erlaubnis, sie zum Schluß hiebey fügen zu lassen.

M. Joh. Nic. Tetens Abhandlung

Von dem Maaß der lebendigen Kräfte.

§. 1.

Wenn ich die Gedanken einiger Naturlehrer für richtig hielte, welche glauben, daß der alte Streit über das Maaß der Kräfte nunmehro zum Vortheil derer, die dem DesCartes und Mersennus folgen, völlig entschieden sey, oder daß sie auch ganz und gar in einer Logomachie bestünde; so würde ich der erste seyn, der es aufs beste als unnütz ansähe, durch eine neue Vertheidigung des Leibnitzianischen Maaßes, eine schon gehobene Verwirrung wieder rege zu machen. Ich hoffe aber, daß das folgende die Unrichtigkeit von beiden zeigen werde. Es fehlet sehr viel, daß die Sache gleichgültig sey, ob man die Grösse einer Kraft eines Körpers aus seiner Maße in die Geschwindigkeit, oder aus dem Quadrat der letztern in die Maße, bestimmen müsse: In der Mechanik, wo man mehr die Bewegungen, die von unbekanten Kräften entstehen, berechnet und mit einander vergleicht, als diese Kräfte selber, kan man alle Aufgaben auflösen, ohne

vorher eines der streitigen Kräften-Messungen ausgemacht zu haben. Hr. Euler hat es dahero nicht voraus setzen dürfen. So bald aber die Kräfte, deren Wirkungen man aus ihnen erkennen will, bewegte Körper sind; so würde ein gewaltiger Unterscheid entstehen, ob man z. B. die Kraft einer Kanonkugel nach ihrer Geschwindigkeit, oder nach dem Quadrat derselben berechnet. Es ist aber der Nutzen, den die Fortsetzung des wahren Maasses gibt, noch allgemeiner, und betrift den Sinn der ersten Grundreguln der Natur, welche von den beiderseitigen Partheien eine sehr verschiedene Erklärung erhalten.

§. 2. Eine ausführliche Geschichte des Streits über das Maaß der lebendigen Kräfte, gehört zu meinem Zwecke nicht; auch ein blosses Verzeichnis derer, die davon geschrieben, ist zu weitläuftig. Indessen wünschte ich eine solche Geschichte, sie würde ein trefliches Stück zu der Historie des menschlichen Verstandes abgeben, und uns lehren, daß auch die Mathematiker, sobald sie auf Gegenstände kommen, die ausser der Sphäre des Calculs sind, in eine Verwirrung gerathen können, welche man sonst nur in der Metaphysic vermuthet. Das besonderste ist, daß es heut zu Tage einige geben kan, welche gerade heraus läugnen, daß Leibnitz dasjenige Maaß allgemein gebrauchet habe, davon wir ihm die Ehre der Erfindung beilegen. Er erklärt sich so deutlich darüber, daß man nur die erste seiner Aufsätze lesen darf, um nicht nur zu sehen, daß es seine wahre Meinung sey, man müsse die Kraft eines bewegten Körpers durch das Product aus der Maße in das Quadrat der Geschwindigkeit in allen Fällen messen; sondern auch die Ordnung der Gedanken, die ihn auf diese Meinung geführet.

§. 3. Durch Speculationen a priori wird man in dieser Sache wohl schwerlich etwas ausmachen. Die metaphysische Dynamiquen bestätigen diese Muthmassung mehr, als sie sie widerlegen; und mich machen folgende Betrachtungen davon gewiß. Wenn man frägt, was eine leben-

dige Kraft sey, davon hier die Rede ist, so kan man, wenn auf den Ursprung des Begrifs der Kraft in uns acht hat, nicht anders antworten, als dieses. Es sei die lebendige Kraft so ein Etwas, wodurch ein bewegter Körper Bewegungen erregen, oder wodurch er eine Uhrsache neuer Bewegungen in andern werden kan. Man stellet sich gerne dieses Etwas, als von dem bewegten Körper verschieden vor, dem es wie ein Accidenz einer Substanz, wie man in den Schulen zu sagen pflegt, inhäriren soll, da es doch wirklich nichts ist als der bewegte Körper selber. Sind ausser der Kraft, Bewegungen zu wirken, noch andere Kräfte den Theilen der Materie wesentlich, dahin von einigen die anziehende, zusammenhängende, ausdehnende und zurückstossende gerechnet werden; so sind diese es nicht, von deren Grösse die Rede ist. Die Wirkungen dieser Kraft sind neue Bewegungen, dahero man die algemeine Regul, **daß der völlige Effect der Kraft, die auf seine Hervorbringung angewendet wird, proportional sey,** hier anwenden und sagen kan, daß, wenn die Kraft ein in Bewegung gesetzter Körper ist, alle von ihm verursachte Bewegungen der verwendten Kraft proportional seyn. Woraus denn von selbsten die Folge fließt, daß alle Wirkungen zusammen, die ein bewegter Körper hervorbringt, bis er zum Stande der Unwirksamkeit, das ist, hier zur Ruhe gebracht ist, auf eine gewisse Art einen Maaßstab abgeben müssen, durch welchen die Grösse desjenigen Etwas, welches wir Kraft nennen, zu bestimmen sey. Man braucht den Unterscheid unter todte und lebendige Kräfte hier gar nicht zu wissen: obgleich **Hermann** und **Bernoulli** dieses als nothwendig ansehen. Wenn ein Körper den andern druckt, so besteht dessen Druck, oder man stellet sich die Sache wenigstens so vor, in vielen auf einander folgenden Sollicitationen, die aber alle sogleich wieder dnrch die gesetzte Hinderniß gehoben werden; so daß jede neue Sollicitatio den Körper als ruhend vorfindet, und dies ist die todte Kraft. Wann das Hinderniß nicht gewesen, so würde

de die zweite Sollicitatio den Körper schon nicht als ruhend vorgefunden haben, da die erste ihm schon eine Bewegung beygebracht; sie hätte seine Geschwindigkeit und Kraft vermehret, und die Summe der Sollicitationen, deren Wirkung in dem Körper aufbehalten worden, wäre die lebendige Kraft gewesen, welche die todte hieß, da ihre Wirkungen sogleich wieder durch den Widerstand gehoben wurden. Weil aber in dem Fall, wenn die Kraft lebendig ist, die folgende Sollicitation den Körper nicht in Ruhe findet, wie in dem Fall, wenn sie todt genennet wird; so läßt sich so gerade nicht behaupten, daß diese zweite Sollicitatio in dem ersten Fall so viel Geschwindigkeit in dem Körper hervorbringe, wie ich gleich mit mehrern zeigen werde, als in dem letzten; und aus dieser Ursache drang **Bernoulli** und **Hermann** so sehr auf diesen Unterschied, ohne welchem man doch eben dieselben Gedanken, die diese beiden Mathematiker gehabt, vortragen kan. Man kan ferner dies im algemeinen hinzusetzen: Es sey V, die Kraft; dV einer dergleichen Theile, in welche die Kraft zerlegt gedacht werden kan; E der völlige Effect von V; dE ein solcher Theil von E, dergleichen dV von V ist. S, die Summe der dE, aus welcher E besteht; es ist überhaupt $V = E$, oder $V = dE \times S$. Die Zeit kan hier in keine Betracht kommen; sie ist eine blosse Relation und keine innere Bestimmung der Action der Krafr. Weil aber S desto grösser ist, je länger die Zeit ist, in welcher die Kraft ihr Wirken fortsetzt (t), und je kürzer die Zeit ist, in welcher ein dE hervorgebracht wirdt dt; so kan man die Gleichung $V = dE \times S$ verändern in $V = dE \times \frac{t}{dt}$.

§. 4. So bald wir diese algemeine Regul etwas genauer bestimmen wollen, so zeigt sich bey dem dE, wenn S gleich ist, schon eine Schwierigkeit. E sey eine erregte Bewegung, deren Grösse wir durch ein Product aus der Masse (M) in die Geschwindigkeit (C) auszudrücken pflegen

gen, und motus quantitatem zu nennen. Wenn man aber dieses Product MC in gleiche Theile zerlegt, darf man voraussetzen, daß jedes dieser Theile $\frac{MC}{n}$ ein gleiches dE sey, einem dV proportionell? Oder erwächst MC etwa nach und nach aus solchen $\frac{MC}{n}$, deren eins immer dem Zusatz des folgenden $\frac{MC}{n}$ sich entgegensetzet, und also ein anders dV zum zweyten $\frac{MC}{n}$ als zum ersten nothwendig macht? Laß dC ein solcher Theil von C seyn, wie dV von V ist. Man setze dV habe gewirket Mdc; so ist die Frage, ob diesem noch ein Mdc von eben dem dV hinzugesetzet werden könne; oder ob nicht schon die vorhandene dC, sich dem folgenden entgegen setzen, daß also dc = $\frac{dV}{c}$ sey, oder daß der Anwachs der Geschwindigkeit in einem Körper sich richte nach der Grösse der dazu angewandten Kraft, und umgekehrt nach der Grösse der Geschwindigkeit, die der zu vergeschwindernde Körper schon besitzet? Wäre dieses letzte, so wäre der Effect, oder ein Theil dE, welche beständig dem dV proportionell ist, nicht blos durch Mdc, sondern durch M.C.dc zu bestimmen seyn, oder: man müste nicht nur auf die hinzugesetzte Geschwindigkeit allein, sondern auch auf den vorhergehenden Zustand des Körpers sehen; auf die Folge der Grade der Geschwindigkeiten in denselben, wenn man dV schätzen wolte. Ich gestehe, ich sehe nicht, wie man dies a priori ausmachen wolle. Wenn noch keine Geschwindigkeit in dem Körper ist, sondern er ruhet, so ist ohnstreitig Mdc dem dV oder der ersten Sollitation proportionell. Wenn man sich nun die vim mortuam vorstellet, als eine Menge gleicher Sollicitationen, deren Effect aber weggenommen wird, und

bey

bey jeder einzeln Sollicitation Mdc ist; so kan man sagen, die Effecten aller dieser Druckungen, sey gleich dem Mc, ohnerachtet davon in dem Körper immer nur ein Mdc vorgefunden wird. Woraus aber so natürlich nicht folget, wie Hr. Prof. Kraft glaubet, daß auch in dem Fall, wenn die folgende dV einen sich schon bewegenden Körper vorfinden, sie jedesmahl dem Mdc gleich, und also ihre Summe oder v dem Mc gleich sey.

§. 5. Der Herr v. Maupertuis maaß das E, oder die entstandene Wirkung, durch ein Product aus der Maße, Geschwindigkeit und dem Raum, wodurch die Bewegung erfolget. Wenn man einen bloß druckenden Körper betrachtet, so findet man in demselben einen gewissen Impetum, womit er einen andern in Bewegung zu setzen sich bemühet. Ist aber der Körper A in einer wirklichen Bewegung, und geht durch den Raum a——b in einer gewissen Zeit, so erblickt man ihn in jedem Punct des Raums mit der Geschwindigkeit c, die der druckende Körper nur in einem Punct a im Anfang besitzt. Soll man also die in allen Puncten der Linie bemerkte Geschwindigkeit, als eine gewisse Menge derselben betrachten, und also bey jeder Bewegung auf die Geschwindigkeit und diese Menge zugleich sehen, so wird der Effect auf die Art ausgedruckt werden müssen, wie es Maupertuis gethan. Krüger und Stübner sind auf ähnliche Einfälle gekommen. Dann würde, weil man statt des Raums, durch welchen der Körper in einer gegebenen Zeit fortgeht, oder statt der Menge derer C die C selber setzen kan, $E = MC^2$ werden. Da nun E dem V proportionell ist, so hätten wir in diesem Fall $\frac{dV}{c} = dc$, wenn man $M = 1$. setzet. Man wird aber a priori schwerlich ausmachen können, ob diese Vorstellung gegründet sey, oder nicht; wir kennen die Natur der Bewegung dazu zu wenig. Von den Bewegungen, die in der Welt wirklich durch einen beständigen Widerstand

geschehen, läst sich wohl begreifen, daß da in jedem Punct der Linie a——b etwas ausgerichtet wird, es ein ganz anders sey, ob sich der Körper nur durch einen Punct oder durch die ganze Linie bewege, und daß die Wirksamkeit des Körpers im letzten Fall grösser sey, als im ersten. Wenn man aber bey der Fortsetzung der Bewegung durch den Raum nichts als die Beybehaltung der in dem Anfang desselben besitzenden Geschwindigkeit zu betrachten hat, die, wenn keine Hindernisse vorhanden, die wirkliche Bewegung nach sich ziehe, so kan man durch die blosse **Verbleibungskraft** des Körpers begreifen, warum in allen Puncten die anfängliche Geschwindigkeit behalten wird, und es scheint, hiezu gar keiner besondern Kraft nöthig zu seyn: dahero denn auch der Raum, oder die Menge der Puncte, in welchen sich die Celerität wirksam zeiget, nicht als eine solche Anzahl von Geschwindigkeiten, welche als besondere Wirkungen eine eigene Kraft erfodern, angesehen werden kan. In der That hat der Einfall des Hrn. v. Maupertuis seinen guten Grund. Ein Körper, dessen Geschwindigkeit verdoppelt werden soll, muß nicht nur einen doppelten Impetum erhalten, sondern auch eine Fähigkeit, seinen verdoppelten Impetum doppelt so viel mahl anzuwenden. Ob nun gleich dieses letzte Vermögen mit der Vermehrung seines Impetus beständig verknüpfet ist, so folget doch nicht, daß es eine nothwendige Folge desselben sey, daß es nicht realiter von ihm verschieden, keine besondere Kraft erfodere, und die Ursache nicht seyn könne, warum dc nicht dem dV, sondern nur im Anfang gleich sey. Allein ich nehme diese Meinung mehr an für einen Schluß, wozu die Erfahrungen führen, als für eine a priori erwiesene Wahrheit; und die zu nichts weniger geschickt ist, als zu einen Grundsatz, worauf das Kräftenmaaß erbauet werden soll.

§. 6. Es folget hieraus ferner, daß aus den Begriffen nicht entschieden werden könne, ob gleiche MC, wenn beide factores in ratione eadem reciproca sich verändern,

dern, und also das Product gleich bleibt, ein gleicher Effect sey. Ist $m.c = MC$, so ist $M:m = c:C$; Ist nun die Gleichung $\frac{dV}{c} = dc$ richtig, so wird die Kraft, welche in M, die C erreget, in m die c nicht hervorbringen können. Ist aber dV immer $= dc$, so kan die Kraft, die dem M die C gibt, auch dem m die c eindrücken. In der That hängt das Maaß der Kräfte von der Beantwortung dieser Frage ab; ist $\frac{dV}{c} = Mdc$, oder $dV = Mdc$? Ist die erstere Gleichung richtig, so hat Leibnitz Recht; ist das letzte, so ist das Maaß des Mersennus und des Cartes unumstöslich.

§. 7. Man siehet aber auch leicht, daß dV hier eine Kraft anzeige, die auf dE ist verwendet worden. Folglich beweiset es die Richtigkeit der Gleichung $\frac{dV}{c} = dc$ nicht, wenn man mit Musschenbroecken darthut, daß die Geschwindigkeit eines Körpers um einen Grad zu vermehren, der schon einen Grad besitzet, eine grössere agirende Kraft erfodert werde, als ihm den ersten Grad einzudrücken, und daß die Formul richtig sey, wenn dV die agirende Kraft anzeiget. Die Geschwindigkeit $= 1$ kan einem Körper A von einem andern gleichen B, der eben die Geschwindigkeit $= 1$ hat, beygebracht werden; aber dieser letzte wird die Geschwindigkeit des A, wenn sie schon $= 1$ ist, nicht um 1 zu vermehren im Stande seyn. Jeder gibt zu, daß die actio corporis B grösser seyn müsse, wenn dem A die C soll um d vermehret werden, als wenn A Anfangs die d erhalten soll. Die Frage ist, ob die actio des B in A in dem letzten Fall grösser seyn müsse, als in dem ersten. Andere aus der Natur der Körper und der Bewegung hergenommene Gründe die Gleichung $dV = cdc$ zu erweisen, dergleichen von Joh. Bernoulli, Her-

mann, Gravesand und andern gegeben sind, will ich unten gelegentlich berühren.

§. 8. Ist nun in der Gleichung $V = dE \times S$, oder $dV = dE$, das dE bestimt, entweder durch $MCdc$, oder durch Mdc; so haben wir noch weiter nicht als eine Gleichung zwischen der Kraft eines Körpers A, und der Geschwindigkeit, die durch diese Kraft in einem andern B hervorgebracht wird. Man will aber auch die Verhältniß der Kraft des A zu seiner eigenen Geschwindigkeit erkennen. Es sey K die Geschwindigkeit des A, und dK ein solcher Theil, dergleichen oben dV von V war. Wenn nun dV mit $BCdc$ oder mit Bdc verglichen ist, so muß durch A und K eine Function von $BCdc$ oder von Bdc, das ist, von dV ausgemacht werden. Es wird sich im folgenden zeigen, daß wenn $dV = Bcdc$, auch $dV = AKdK$ und $V = AK^2$ sey; wenn aber $dv = Bdc$; auch $dV = AdK$, oder $V = AK$ werde.

§. 9. In der algemeinen Gleichung $V = dE \times S$, wo nemlich E in solche gleiche dE getheilet werden kan, ist S bestimt, wenn V und dE gegeben sind. Ist nun $AK^2 = Bc^2 . S$, so ist $S = AK^2 : Bc^2$; oder ist $AK = Bc \times S$, so ist $S = AK : B.C.$ Ist aber V noch nicht mit K verglichen, so kan man doch zwey V nehmen, die einander gleich sind; alsdenn wird in den zwey Fällen das Product $dE \times S$ gleich seyn, und S sich umgekehrt verhalten, wie Bc^2 oder wie Bc.

§. 10. Wir können nach dem 3ten §. statt S, $\frac{t}{dt}$ setzen. Es wird also aus $V = dE \times S$, die Gleichung $V = dE \frac{t}{dt}$. Es ist klar, daß wenn S nach §. 9. bestimt ist, t mit dt zugleich kleiner und grösser werden müsse. Es kan seyn, daß die dV, woraus V bestehet, geschwinder nach einander ihre Wirkungen dE hervorbringen; dann wird das dt kleiner. Ist nun S von einer bestimten Grösse,

so

so wird auch t kleiner seyn, weil die Kraft sich ehe erschöpft. In diesem Fall ist dV allein aus dE zu bestimmen, ohne daß noch dt müsse zu Hülfe genommen werden. Wenn wir zwo Reihen elastischer Federn uns einbilden, deren jede aus einer gleichen Anzahl bestehet, die so gesetzet sind, daß ein Körper, der von der ersten Feder getrieben wird, sich nach der zweiten bewegt, welche ihn so ferner nach der folgenden schickt. In beiden Reihen sollen die Distanzen der Federn gleich seyn. Die erste Feder A wird den Körper desto geschwinder nach der zweiten B bringen, je grösser die Geschwindigkeit ist, die sie ihm beybringt, und so werden alle folgende Federn desto geschwinder auf den Körper wirken. Die Zeit dt wird also kleiner werden, aber auch t. Es bleibt die Menge der Wirkungen eben dieselbe, wie in der andern Feder, wo ihre Entwickelung und Wirkung länger dauren kan. Die Kräfte der beiden Federn sind hier, wenn sie alle gleich stark würken, den Kräften der ersten proportionell, das ist ihrem dE. Eben dasselbe würde gelten von zween Kräften, die einen Körper nach den Mittelpunct ziehen, wenn man sich sie vorstellen kan, als eine Menge von ziehenden Kräften, die in jedem Punct der Distanzen vom Mittelpunct liegen. Ist diese Distanze gleich, so verhalten sich die Kräfte wie dE, das ist wie dV, oder wie ersten Sollicitationen.

Ist aber t in zween Fällen gleich, so ist ohnstreitig $V = \frac{dE}{dt}$. Denn alsdenn ist der Grund in der innern Wirksamkeit der Kraft, warum in einem kleinern dt ein gleiches dE hervorgebracht wird. Vergleicht man dahero zween Kräfte, V, v, die durch eine gleiche Zeit gewirket, so ist $V : v = \frac{dE}{dt} : \frac{de}{d\tau}$, da τ das ist bey v, was dt bey V.

§. 11. Man kan aus der Gleichung $V = dE. \frac{t}{dt}$

 gar

gar leicht die Ursache erkennen, warum das Grundgesetz der Mechanik, welches Hr. Euler erfunden, und alle davon abhangende, ohne Besorgnis zu irren gebraucht werden können, ob es gleich noch unausgemacht ist, wie dE zu bestimmen sey. Wenn V seiner Natur nach unbekant ist, und man sich also darum unbekümmert läst, so kan sie doch so wirken, daß in gleichen dt, immer eine gleiche Bewegung, oder sonst was gleiches, welches wir als ein dE ansehen, produciret wird. Alsdenn ist $\frac{dE}{dt}$ etwas beständiges, und die ganze entstandene Bewegung ist wie t, oder die Zeit, in welcher die Kraft gewirket. Sehen wir nun das beständig gleiche $\frac{dE}{dt}$ als eine gleiche Wirkung an, welche von einer gleichen Kraft herrühret, und nennen dieses P, so ist $V = P.t$ und ein dV, oder eine Sollicitation ist $\frac{dE}{dt}$. Es erfülle ein Mensch in einer Stunde ein Gefäß mit Wasser; in der zweiten Stunde werde durch zween Menschen wieder ein gleiches Gefäß gefüllet, deren jeder eben so stark arbeiten müssen, als in der ersten Stunde der einzige, weil das Wasser weiter hergeholet werden muste, oder sonsten eine Verhinderung da war. Aus eben der Ursache werde in der dritten Stunde von dreyen ein gleiches ausgerichtet. Sehe ich blos auf die Wirkung, die mir bekant ist, nemlich das Füllen der Fässer, ohne zu wissen, welche Beschaffenheit es mit der Ursache habe, und nehme an, daß zu einer gleichen Wirkung eine gleiche Kraft erfodert worden, so ist, wenn bekannt ist, wie groß das Gefäß sey, welches in einer Stunde erfüllet; aus der Zeit, in welcher die Kraft gewirket, die ganze Masse des Wassers, die in das Gefässe gebracht ist, bestimt. Die Wirkung ist alsdenn der Zeit proportionell. Nenne ich die Ursache, die in einer Stunde ein Gefäß voll gemacht, die Kraft, und halte die Kräfte für gleich, wenn die mir bekannte Wir-

kungen gleich sind, so ist die ganze Wirkung, nemlich die ich kenne, der Zeit und der Kraft gleich. V ist alsdenn der Wirkung gleich, diese ist $= \frac{dEt}{dt}$, das ist hier P.t. Aber man sieht auch leicht, daß S hier eigentlich nicht die Kraft anzeige, sondern nur ein Zeichen ist von dem, was eine unbekante und den Zeiten proportionell die bekanten Wirkungen hervorbringende Kraft, in einer gewissen Zeit wirket. Eine solche Beschaffenheit hat es mit den gleichförmig vergeschwindernden Kräften. Durch sie werden in gleichen Zeiten gleiche Bewegungen, oder Geschwindigkeiten in einer gegebenen Masse, hervorgebracht. Wir nehmen daher $\frac{mdc}{t}$ als eine gleiche Wirkung dE an, denen wir die Kraft proportionell setzen, und diese ist P. Die ganze auf die Art berechnete, und dafür gehaltene Wirkung, die wir der ganzen gewirkten Kraft gleich setzen, ist also P.t. oder wenn man statt des vorigen t, dt schreibt, so ist $Pdt = mdc$. Wo P weiter nichts bedeutet, als ein Zeichen, das uns lehret, wie groß die Geschwindigkeit sey, die von der Ursache des Vergeschwinderns, das ist, der Kraft, gewirket wird in einer gegebenen Zeit. Man kan wiederum zwischen c und dt, und den Raum eine Gleichung finden, als $c = \frac{ds}{dt}$, $dc = \frac{dds}{dt}$; so wird aus $Pdt = mdc$, $Pdt^2 = mdds$, oder 2mdds. Man sehe das 2te St. dieser Beitr. S. 130. u. f. Ist es also zu verwundern, daß man des Maasses der Kräfte nicht bedarf, da man eigentlich von keinen Kräften handelt, ob man gleich davon redet? Man berechnet nur die Wirkungen, von denen man weiß, daß sie nach einer gewissen Regul von der Kraft hervorgebracht werden. Es bleibt immer wahr, was Newton sagt: vis centripetæ

quan-

quantitas acceleratrix est ipsius (nemlich in so ferne sie acceleratrix ist) mensura velocitati proportionalis; und vis centripetae quantitas motrix est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat. Man kan eben so sagen: die Kraft der Arbeitenden in dem vorhergehenden Beispiel, in so ferne sie macht, daß die Fässer erfüllet werden, wird gemessen, durch die Menge des Wassers, welches in einer gegebenen Zeit in die Fässer gebracht wird.

§. 12. Es war nothwendig, daß ich mich bey diesen vorläufigen Betrachtungen so lange aufhalten muste, ob sie gleich die Hauptsache nur scheinen in der Ferne zu berühren, und nichts weniger, als zur Entscheidung des Streits hinreichend sind. Es musten gewisse Vorurtheile gehoben werden: und gezeiget werden, worauf es bey der Beantwortung der Frage: ob **Mersennus** oder **Leibniz** Recht habe, eigentlich ankomme. Die Hauptabsicht aber ist gewesen, es in dem folgenden einleuchtend zu machen, daß die Folgerungen, die man aus den Begriffen richtig machen kan, aufs schönste mit dem, was die Erfahrung lehren wird, übereinstimmen, welcher Punct besonders die Italiäner Vincenzzo Riccoti und Zanotti in Verwirrung gebracht. Die Schlüsse a priori führen uns bis an den Scheideweg, und lassen uns den rechten Weg muthmassen; die Erfahrung komt zu Hülfe, und sagt uns gewiß, welcher es sey. Aus dieser allein wollen wir die nähere Bestimmung der algemeinen Gleichungen $V = E$, und $V = dE \times S$ hernehmen, wenn E erregte Bewegungen, dE gleiche erregte Bewegungen sind, und V die Kraft eines bewegten Körpers ist. Zu dem Ende will ich zum voraus einige Lehrsätze anführen, die als Grundsätze in den folgenden sollen angesehen werden, und von der Beschaffenheit sind, daß beyde streitende Partheien sie als ausgemachte Wahrheiten annehmen. 1) **Zwey Körper A und B von gleicher Maasse und gleichen Geschwindigkeiten, haben gleiche Kräfte.** Man kan nicht, ohne etwas

was unerwiesenes vorauszusetzen, annehmen, daß allemahl bey einer gleichen Grösse der Bewegung die Kraft gleich sey: aber wo M = m, und C = c, da ist in den Körpern, in so ferne man sie hier betrachtet, wo man die etwanigen besondern Eigenschaften der Elemente bey Seite setzet, nichts, das verschieden wäre. Ihre Kräfte müssen dahero nothwendig gleich seyn. 2) **Der Theil der Kraft des bewegten Körpers, welcher auf eine Wirkung verwendet wird, geht von der Kraft ab.** Wie auch die Wirkung und die Kraft zu bestimmen sey, so ist die Regul; die Wirkung ist der Gegenwirkung gleich, in so weit wahr. Die das Maaß des Leibnitzen verwerfen, setzen statt der Wirkungen Bewegungen, mit welchem Rechte, wird sich unten zeigen; aber da sie diesen die darauf verwandte Kräfte gleich setzen, so müssen sie nothwendig eingestehen, daß so viel B Kraft erhält von der Wirkung des A; so viel werde dem A von seiner Kraft entzogen. Aus diesen beiden folget unmittelbahr, 3) **Daß die Kraft, welche erfodert worden, zween gleichen Körpern A und B gleiche Geschwindigkeiten einzudrücken, gleich sey.** Denn diese Körper A und B haben gleiche Kräfte; auf deren Hervorbringung gleiche Kräfte also verwandt worden sind, daher auch zween V, v, deren jede eben dem M eine gleiche C mitgetheilet, gleiche Kräfte entzogen sind. Man kan auch im geringsten hier die Zeit nicht hereinziehen, in welcher M.c. gewirket wird Wenn V das M.C in einer kürzern, v das MC in einer grössern Zeit gewirket, so folget weiter nichts, als daß der Theil von V, v, der zu MC erfodert worden, geschwinder angewendet im ersten Fall als im letzten; nicht aber daß es grösser sey. Ob V, v, darum grösser und kleiner sey, weil eben derselbe Theil in einer kleinern oder grössern Zeit angewendet werde, ist eine andre Frage, die drunten vorkommen soll. Jetzo setze ich nur als ausgemacht voraus, daß die auf gleiche Wirkungen angewandte Theile gleich seyn. 4) **Wenn der Körper A, der in der Richtung AB mit der Geschwin-**

schindigkeit AB fortgeht, schief auf C stößt in der schiefen Richtung AD; so ist die Kraft, womit er in C wirkt, gleich der Kraft, die A haben würde, wenn er sich mit der Geschwindigkeit AD, welches eine der beiden Perpendiculair Linien ist, die von A und B gezogen, einander durchschneiden, nach der Richtung AD, bewegte. Dies ist wiederum ein Grundsatz, den keiner bezweifelt hat, noch bezweifeln kan. Man pflegt ihn wohl auch so auszudrücken; ein Körper wirkt auf einen andern, auf den er unter einen Winkel stößt, nur mit seiner perpendikulairen Bewegung: und da man die Bewegung seiner Kraft gleich setzet so muß man den Satz auch so eingestehen, wie er hier ausgedrücket worden. Hieraus aber erhellet von selbsten, daß die Kraft, welche der Körper A, der sich mit der Geschwindigkeit AB nach dieser Richtung beweget, nur in andere perpendiculaire aufgelöset werden kan; ob sie gleich auf viele andere verschiedene Arten kan entstanden seyn. Es mag die Kraft des A mit der Geschwindigkeit AB nach dieser Richtung vielleicht aus zweien andern, deren eine nach der Richtung AC, die andere nach DA gewirket, und diesen Linien proportional gewesen ist, zusammengesetzet seyn, Soll aber A in C schief wirken, so geschicht es nicht mit der Kraft, die durch AC ausgedrücket werden könne, so daß CB übrig bleibe, sondern nur mit AD; und die zurückbleibende Kraft ist DB. Die Kraft des A kan also durch die schiefe Wirkung nur auf so viele Arten getheilet werden, als auf welchen rechtwinklichte Triangul auf AB als der Hypothenuse sich beschreiben lassen, das ist, so viele Puncte in der halben Peripherie des Cirkuls liegen, dessen Durchmesser die Linie AB ist.

§. 13. Theorem. Wenn die Kräfte gleich sind, und also auch die Effecte, durch deren Hervorbringung sie entweder ganz erschöpfet werden, oder gleiche Theile verliehren, auch gleich sind; und die Effecten sollen entstandene Bewegungen seyn, ohne

auf

auf die Richtungen zu sehen, nach welchen diese erregten Bewegungen gehen: so muß E bestimt werden durch ein Product aus der Maße in das Quadrat der Geschwindigkeit.

Beweis: Ein Körper A, dessen Geschwindigkeit durch die Linie AC ausgedrucket wird, bewege den Körper C von gleicher Masse nach der Richtung AC, so mögen 1) A und C elastische Körper seyn; und also A dem C seine ganze Geschwindigkeit eindrücken und hernach ruhen. Die ganze Wirkung wird seyn die erregte Bewegung C × AC = A × AC. Eben der Körper A stosse mit gleicher Geschwindigkeit schief an C in der Richtung AB, so wird er diesem die Geschwindigkeit AB beybringen, nach der Richtung AB, und BC behalten nach der Richtung BC, oder der parallelen AE. In dieser Richtung stosse A gerade auf einen Körper der C gleich ist, so wird er ihm die Geschwindigkeit BC mittheilen, und ruhen. Die Bewegungen, welche in diesem letzten Fall entstanden sind, waren C × AB und C × BC. Im ersten Fall waren sie C × AC. Diese beiden entstandene Wirkungen sind unter keiner andern Bedingung gleich, als wenn die Effecte dem Produkt aus der Masse in das Quadrat der erregten Geschwindigkeit gleich gesetzet wird. Denn alsdenn wird C × ACq = C × ABq + C × BCq.

1. Zusatz. Wenn A auf C nach der Richtung AD, oder einer jeden andern gewirket, so würde eben dasselbe statt gefunden haben.

2. Zusatz. Wenn der Körper A, als er die Bewegung A × AB schon producirt war, mit der übrigen Geschwindigkeit BC, von neuen schief an eine gleiche Masse gestossen hätte: so würde gleichfals folgen, daß wenn die Summen aller erregten Wirkungen immer gleich bleiben soll, das Product aus der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit als die Wirkung angesehen werden müsse.

2) Setzen wir A solle nach den angenommenen Gesetzen harter Körper wirken; so wird A dem C in der Richtung

tung AC, die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}$AC, beibringen, und eben diese verlieren. Der Effect ist also $\frac{1}{2}C \times AC$; A stosse mit eben der Geschwindigkeit schief an C nach der Richtung AD; so erhält C die Helfte der Geschwindigkeit nach AD, und die producirte Bewegung wird seyn $C \times \frac{1}{2}AD = C \times AE$. A wird nach der Richtung AD noch die Geschwindigkeit $= \frac{1}{2}AD = AE$ behalten; die Geschwindigkeit DC ist unverändert geblieben. Dahero sich A nach dem Stoß durch AG mit der Geschwindigkeit AG beweget. In G stosse A wieder schief nach der Richtung GK an eine gleiche Masse; und die erregte Bewegung wird seyn nach der Richtung $GK = C \times \frac{1}{2}GK = C \times \frac{1}{2}DC = C \times GM$. A behält nach der Richtung GM eben diese Geschwindigkeit GM; die Celerität nach GC ist unverändert geblieben: also wird A nach diesen Stoß nach GI mit der Geschwindigkeit = GI sich zu bewegen fortfahren. GI ist aber $= \frac{1}{2}AC$; folglich ist die zurückbleibende Bewegung in A in diesem sowohl als in dem ersten Fall $= \frac{1}{2}A \times AC$; folglich sind die noch übrigen Kräfte, und also auch die angewendeten einander gleich. Die gewirkten Bewegungen waren im ersten Fall $A \times \frac{1}{2}AC$; in diesem letzten $A \times \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}A \times DC$. Sollen diese Effecte gleich seyn, so muß wiederum das Product aus der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit als der Effect angesehen werden: dann ist $A \times \frac{ACq}{4} = A \times \frac{1}{4}ADq + A \times \frac{1}{4}DCq$.

Anm. Die vorigen Zusätze gelten auch hier.

§. 14. Theorem. Die vorige Bedingung bleibe, daß man nemlich auf die Richtung nicht sehen wolle; und der ganze Effect, der dem V gleich, bestehe aus gleichen Theilen dE; so sind die Summen solcher dE, wenn die Kräfte gleich sind, umgekehrt wie diese dE, oder die Producte aus der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit.

Joh.

Joh. Bernoulli und andere haben dieses in einzeln Fällen demonstrirt: Man kan es allgemein auf folgende Art erweisen.

Erster Fall. Die Bewegungsgesetze elastischer Körper sollen gelten. AC sey die Geschwindigkeit des Körpers A. Auf AC beschreibe man einen Halbcircul, und nehme die Sehne AB, so daß $AB = \frac{1}{n} AC$ werde, und n sey eine ganze Zahl. Man verknüpfe B und C, und setze BC fort nach D, daß $CD = BC$ sey. Auf CD werde wie vorhero ein Halbcircul beschrieben; in dieser nehme man die Sehne $CE = AB = \frac{1}{n} AC$; verknüpfe E und D; und continuire ED bis F, daß $DF = ED$ werde. DF sey wieder der Durchmesser eines Circuls, und man verfahre wie zuvor, bis die Sehne, die der AB gleich, der zweiten Sehne in diesem Halbcircul gleich werde; so daß beide gleich seyn $\frac{1}{n} AC$. Der Körper A stosse in A nach AB schief auf eine gleiche Masse C; so wird A dem C die Geschwindigkeit AB beibringen, und mit DC nach dieser Richtung sich zu bewegen fortfahren. Die entstandene Bewegung ist also $A \times AB = A \times \frac{1}{n} AC$. BCq wird seyn $= ACq - ABq = ACq - \frac{1}{n^2} ACq = (1 - \frac{1}{n^2}) ACq$. Mit der Geschwindigkeit BC stosse A in einem Punct dieser Richtung C schief an eine gleiche Maße nach CE; und die producirte Bewegung ist wiederum $= A \times CE = A \times \frac{1}{n} AC$. EDq ist $= BCq - CEq = (1 - \frac{1}{n^2}) ACq - \frac{1}{n^2} ACq = (1 - \frac{2}{n^2}) ACq$. Setzet man dies fort, so

wird das Quadrat der folgenden zurückbleibenden Geschwindigkeit seyn $(1 - \frac{3}{n^2})$ ACq, und die entstandene Bewegung den vorigen gleich: denn so oft eine Bewegung $A \times \frac{1}{n} AC$ entsteht, wird von dem Quadrat der Geschwindigkeit $\frac{1}{n^2} ACq$ abgezogen; bis die zurückgebliebene Geschwindigkeit $= \frac{1}{n} AC$ wird. Alsdenn lasse man A einer andern gleichen Masse directe diese Geschwindigkeit mittheilen und ruhen. Die Grösse der veränderlichen Zahl 2, 3, etc. zeigt an, wie viele solcher gleichen Bewegungen $A \times \frac{1}{n} AC$ entstanden. Soll dahero die letzte übrig bleibende $= \frac{1}{n} AC$ seyn, so muß $(1 - \frac{x}{n^2}) ACq = (\frac{n^2 - x}{n^2}) ACq = \frac{1}{n^2} ACq$ seyn; folglich $x = n^2 - 1$. Es ist also die Summe der entstandenen gleichen Bewegungen, welche hier, da die Maßen und die Celeritäten einander gleich, auch gleiche Effecte sind, ausser der letzten $= n^2 - 1$; setzet man diese letzte hinzu, so ist die Summe $= n^2$. Wenn AB eine andere Lage hat, daß $AB = \frac{1}{m} AC$ sey, so ist diese Summe $= m^2$; Ist AB selbst AC, so ist $n = 1$, und die Summe $= 1$. Die Kräfte sind einander gleich, und die völligen Wirkungen, oder die Summen der gleichen Effecte, die Theile des ganzen, sind auch einander gleich, wenn man die Wirkung durch das Product aus der Masse, in das Quadrat der Geschwindigkeit

keit bestimmet, denn alsdenn wird $A \times \frac{ACq}{n^2} \times n^2 = A \times \frac{ACq}{m^2} \times m^2 = A \times ACq$. Wird in der algemeinen Gleichung $V = dE \times S$, statt dE gesetzt mc^2, so ist S, wenn $V = v$, umgekehrt wie mc^2, wenn man die Massen alle einander gleich setzet.

Zweiter Fall: Man lege die Bewegungs-Gesetze harter Körper zum Grunde. Es sey AC die Linie, welche die Geschwindigkeit des Körpers A ausdrücket; mit dieser stosse A in der Richtung AC gerade an eine gleiche Masse, und er wird, vermöge der Voraussetzung, dieser die halbe Geschwindigkeit $\frac{1}{2}AC$, imprimiren. Es ist also die entstandene Bewegung $A \times \frac{1}{2}AC$; und die zurückgebliebene in A eben so groß. Man beschreibe auf AC einen Halbcircul, und ziehe von A und C zwey in einem Punct des Umfangs zusammenstossende Sehnen $AB = \frac{1}{n} AC$ und BC. Man theile AB in zwey gleiche Theile AN, NB. Durch N ziehe man NM parallel mit BC, und durch C die CH parallel mit AB. Dann werde das Parallelogram ANMH völlig beschrieben. Dessen Diagonal werde verlängert bis E, daß $ME = AM$ werde. Auf ME als einem Durchmesser werde von neuen ein Halbcircul beschrieben, und von M die Sehne $MF = AB = \frac{1}{n}AC$, und FE gezogen; MF werde in G in zwey gleiche Theile zerschnitten, und dann ziehe man wie vorhero die parallelen $GS = FE$, $Et = MF$, und die Diagonal Ms. Hiemit werde continuirt bis MS gleich werde dem $\frac{1}{2}AC$. Wenn der Körper A in eine gleiche Masse nach AB stoßt, so entstehet die Bewegung $A \times \frac{1}{2}AB = A \times \frac{1}{2n}AC$. A behält nach dieser Richtung die Ge-

schwindigkeit $AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2n} AC$. Die Geschwindigkeit nach BC oder AH bleibt unverändert, daraus wird die Bewegung, die der Körper nach den Stoß behält = $A \times AM$ nach der Richtung der Diagonal AM. AMq ist $= ACq - ABq + AEq = ACq - \frac{1}{n^2} ACq + \frac{1}{4n^2} = ACq = ACq - \frac{3}{4n^2} ACq = ACq \left(\frac{4n^2-3}{4n^2}\right)$. Das Quadrat der zweiten Diagonal MS, der Geschindigkeit, die A übrig behält nach dem zweiten Stoß wird $= ACq \left(1 - \frac{6}{4n^2}\right) = ACq \left(\frac{4n^2-6}{4n^2}\right)$; und weil man um das Quadrat der folgenden Diagonal zu erhalten, immer von dem Quadrat der vorhergehenden ABq abziehen, und AEq zulegen, das ist $\frac{3}{4n^2}$ ACq abnehmen muß; so wird das Quadrat der dritten Diagonal $ACq \left(\frac{4n^2-9}{4n^2}\right)$; und überhaupt $= ACq \left(\frac{4n^2-3x}{4n^2}\right)$, wenn x anzeigt, das wievielte mahl die Diagonal gesuchet, und eine Bewegung $A \times \frac{1}{2}AB = \left(\frac{A \times AC}{2n}\right)$ hervorgebracht. Wenn $ACq \left(\frac{4n^2-3x}{4n^2}\right)$ dem $\frac{1}{4}ACq$ gleich wird, so ist die Geschwindigkeit des $A = \frac{1}{2}AC$, welche nicht weiter angewendet werden muß, damit in allen Fällen die Bewegung $A \times \frac{1}{2}AC$ und also eine gleiche Kraft in A zurück bleibe. Soll aber $ACq \left(\frac{4n^2-3x}{4n^4}\right)$ gleich werden dem $\frac{1}{4}ACq$, so muß $x = n^2$ seyn; und also sind n^2 Bewegungen, die $= \frac{A \times AC}{2n}$ sind, entstanden.

Woraus

Woraus, wie in dem ersten Fall, erhellet, daß wenn die Effecte gleicher angewandter Kräfte zusammen genommen gleich seyn sollen; die Effecte durch Mc^2 müssen bestimmt werden. Alsdenn wird beständig die Summe der Effecte gleicher Kräfte sich gleich bleiben, so verschieden auch AB ist, weil $n^2.A.\frac{ACq}{4n^2} = m^2.\frac{A.ACq}{4m^2} = \frac{A \times ACq}{4}$, das ist, ein Constans ist: und nur unter diesen Bedingungen ist bey gleichen Kräften, und also gleichem $dE \times S$, das S umgekehrt wie dE.

Zusatz. Daraus folget, daß, wenn die aus einer Kraft entstandene Bewegungen alle einander gleich sind, und man die Richtungen bey Seite setzet, ihre Summe um desto grösser, je kleiner daß Quadrat der Geschwindigkeit ist, in dem Fall, daß die Massen einander gleich seyn. Man beschreibe also eine Hyperbel der zweiten Ordnung, und nehme die Abscissen zum Ausdruck der Geschwindigkeit, die gleiche Masse haben sollen; so druckt die Ordinate die Menge der gleichen Bewegungen aus, die aus der gegebenen Kraft entstehen können, oder die Menge der Masse, der nach und nach diese Geschwindigkeit von einer Kraft beigebracht werden kan. Dies ist klar aus der Gleichung $V = c^2.S.$ Die Folgen, zu welchen diese Reduction führet, muß ich jezo bey Seite setzen.

§. 16. Man darf hier die Zeit in keine Betrachtung ziehen, in welcher diese Bewegungen entstehen; und ich sehe nicht, welchen Grund diejenigen für sich haben, welche behaupten, daß auch hier eine Gleichheit der Wirkungen sey, wenn man die Summe der Bewegungen durch die Zeit dividire, in welchen sie hervorgebracht. Wir wollen einen bestimmten Fall setzen. Es bringt A mit der Celerität $= 2$, in einer Zeit t, die Bewegung $2 \times A$ hervor; die Wirkung seiner Kraft soll seyn $\frac{2 \times A}{t}$. Nach den 14ten §. bringt eben diese Kraft vier Bewegungen, jede $= A \times 1$,

× 1, oder 4 × A, hervor. Laß die Zeit T seyn. Ist nun eine Gleichheit da, so muß $\frac{4A}{T} = \frac{2A}{t}$, und also T = 2t. Es wäre dies wahr, wenn die Grösse des Zeitpuncts, in welchem ein Körper A einer gleichen Masse B eine Geschwindigkeit beibringt, sich allein richtete nach der Grösse der in B gewirkten Geschwindigkeit, ohne daß eine Veränderung in der Geschwindigkeit des A in die Zeit der Wirkung einen Einfluß hätte. Alsdenn würde die Zeit, in welcher A dem B die Celerität = 2 beibringt, doppelt so groß seyn, als die Zeit, in welcher von A dem B die Geschwindigkeit = 1 eingedruckt wird. T würde gleich seyn 4 × ½ t, das ist 2t, und also wäre die gesuchte Gleichheit da. Allein 1) so ist es richtiger, und muß von denen, welche die Zeit hier anbringen wollen, selber zugegeben werden, wie in der Folge erhellen wird, daß der Zeitpunct sich directe verhalte, wie die hervorzubringende Geschwindigkeit, und inverse wie die Geschwindigkeit, womit der Körper A, der sie hervorbringt, wirket; so bald aber dies gesetzet wird, fält die vorige Gleichheit weg. Die zu producirende Celerität bleibt, wenn A vier gleiche Bewegungen erregen soll, gleich; seine eigene Geschwindigkeit aber ändert sich nach jedem Stoß, und ist in dem ersten Fall des 14ten §. wie $\sqrt{ACq \times \frac{n^2-x}{n^2}}) = AC\sqrt{\frac{n^2-x}{n^2}})$, oder wie $\sqrt{n^2-x})$; folglich wären die Zeitpuncte, die jedesmahl auf einen Stoß verwendet würden, wie $\frac{1}{\sqrt{n^2-x}})$, das ist, wenn n = 2, wie $\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}}$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$, deren Summe, welche die ganze Zeit der Wirkung ausmacht, grösser als = 2 ist. Es würden noch 2) diese Ungereimtheit folgen, daß da A mit C

=2,

= 2, die Celerität = 1. gewirket, es eben so viel verrichtet, als da es die C = 2 hervorgebracht. Denn die Zeit, die auf Hervorbringung der C = 1 verwendet, war = $\frac{1}{2}$, und die Zeit auf C = 2, war = 1, folglich die Wirkungen $\frac{2}{1}$, und $\frac{1}{1:2}$ gleich. Es hätte also A mit C = 2, nach diesen Voraussetzungen, in dem Fall, da A vier Bewegungen mit der C = 1. hervorgebracht, viermahl so viel gewirket, als da es dem B die Celerität = 2. eingedruckt; Wenn es also 3) allemahl gleich seine Richtigkeit hätte, daß die Bewegungen durch die Zeit getheilt, gleiche Quotienten gäben, wenn die Kräfte gleich wären; so ist immer die Frage übrig, woher kommt es, daß eben die Kraft, welche in einem Fall nur die Zeit = t aushält, und darinnen 2 × A hervorbringt; im zweiten Fall in eben der Wirksamkeit noch durch 3t bleibt, ehe sie erschöpft wird. Ueberhaupt ist, wie ich schon oben erinnert, die Zeit nur eine Beziehung der Kraft auf andere Veränderungen, deren wir uns in gewissen Fällen mit Nutzen bey Bestimmung ihrer Grösse bedienen, die wir aber bey Seite setzen können, wenn wir die innere Grösse der Kraft nach ihren Wirkungen messen wollen.

§. 17. **Wenn die partiellen Effecte, oder dE, alle gleich sind, und die Kräfte, die sie wirken, sind bewegte Körper, so sind die Summen der Effecte, welche die Kräfte ohne Hinsicht auf die Richtung hervorbringen können, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten der Körper, deren Massen gleich sind:** wenn V = dE.S, und v = de × s; ist dE = de; so ist V : v = S : s, S : s ist aber wie $MC^2 : Mc^2$, daß also auch $V : v = Mc^2 : Mc = C^2 : c^2$.

Beweis. Die Massen setze ich gleich, oder sehe die Körper wie Puncte an, um eine noch grössere Weitläuftigkeit zu vermeiden, als die ist, in welche ich wider Vermuthen schon gerathen bin.

Es sind A, B zwey gleiche Massen; A habe die Geschwindigkeit $= AC$; B die Geschwindigkeit $= BD = \frac{1}{n} AC$. Druckt der Körper B in der Richtung BD einer gleichen Masse entweder seine ganze Geschwindigkeit, oder die Hälfte derselben ein; so ruhet er im ersten, und behält die Hälfte in dem letzten Fall. Die Kraft des Körpers A werde in perpendiculaire Kräfte aufgelöset, wodurch er Bewegungen hervorbringet, die der erregten Bewegung von B einzeln alle gleich sind. Es wird die Summe derselben (nach den 14ten §.) zur Summe solcher Bewegungen, in welcher eine gleiche Masse die ganze Geschwindigkeit AC, oder die Hälfte derselben erhält, welche gleich ist der Summe, die B erregt in der Richtung BD. sich umgekehrt verhalten, wie $ACq : BDq = ACq : \frac{1}{n^2} ACq = n^2 : 1$. das ist wie das Quadrat der Geschwindigkeit des Körpers A zum Quadrat der Geschwindigkeit des Körpers B. Soll also $V : v = S : s$ in diesem Fall seyn; so muß $V : v = n^2 : 1$, seyn, das ist, die Kräfte sind wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, wenn die Massen gleich sind.

Zusatz. 1. Setzet man statt dE, das Product aus der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit, und statt V, eben dasselbe Product, so wird, wenn die Massen alle gleich sind $c^2 = c^2 . S$; und wenn die dE nicht alle einander gleich sind, $AC^2 = Ae^2 + Ad^2 + Af^2$ &c. (nach dem 12. §.)

Zusatz 2. Will man die Zeit mit in die Rechnung bringen, und die Kräfte der Körper ihren Geschwindigkeiten proportionell setzen, so muste hier $C : c$ sein, wie $\frac{S}{T} : \frac{s}{t}$, wenn T, t die ganze Wirkungszeit ausdrücket; folglich wäre $CT : ct = S : s = C^2 : c^2$, wie erwiesen; also wäre $T : t = C : c$. Nimmt man aber an, es richte sich die Grösse des Zeitpuncts, in welcher eine Bewegung erreget wird, bloß nach der zu producirenden Geschwin-

schwindigkeit, so würden hier in diesem Falle alle Zeitpuncte, in welchen einzele Bewegungen entstehen, gleich seyn; und die ganzen Zeiten wären, wie S : s, das ist, wie $C^2 : c^2$. Setzet man hingegen, daß diese Zeitpuncte sind directe wie die zu wirkende Geschwindigkeiten, die hier alle gleich sind, und inverse wie die agirende, und nimt, wiewohl fälschlich an, daß diese während der ganzen Wirkungszeit sich nicht verändert, so wird $T : t = \frac{S}{C} : \frac{s}{c}$, weil $S : s = C^2 : c^2$, auch $T : t = C : c$, welches seyn muste. Hieraus siehet man den Grund, der im 15ten §. n. 1. gemachten Erinnerung.

§. 18. Sind die partiellen Effecte einer Kraft, die dE, alle einander gleich; imgleichen die de, einer andern Kraft; und die Summen der partiellen Effecte sind in beiden Fällen gleich; so ist $V : v = dE. S : de. s = dE : de$, und also $AC^2 : Ac^2 = Af^2 : Ag^2$, wenn f, g die Geschwindigkeiten anzeigen, welche in dE, und de gewirket werden: dahero auch $C : c = f : g$. oder wenn die Kräfte zweier gleichen Maßen von verschiedenen Geschwindigkeiten auf eine ähnliche Art aufgelöset werden, so entstehet eine gleiche Anzahl einzelner Bewegungen, deren Geschwindigkeiten sich verhalten, wie die Geschwindigkeiten der Körper, die die Kräfte sind.

Der allgemeine Beweis ist aus dem vorhergehenden leicht zu ersehen. A habe die Geschwindigkeit AC, wenn $AB = \frac{1}{n} AC$, so können aus der Kraft des A. n^2 Bewegungen entstehen, deren jede = ist $A \times \frac{1}{n} AC$. Der Körper C habe die Geschwindigkeit CD, und cf sey $= \frac{1}{n}$ CD, so können gleichfals aus der Kraft des C durch die

Auseinandersetzung n^2 Bewegungen hervorgebracht werden, deren jede $= C \times \frac{1}{n} CD$. Die Summe der gleichen dE ist bey beiden $= n^2$. Die dE selber sind wie $A \times \frac{1}{n}$ $AC : C \times \frac{1}{n} CD =$ (weil $A = C$) $AC : CD$.

Zusatz 1. Wolte man wiederum die Zeit in Betracht ziehen, und setzen, $AC : CD = \frac{AB.S}{T} : \frac{Cf.S}{t} = \frac{AB}{T} : \frac{Cf}{t}$, so müste $T = t$ seyn, weil $AC : CD = AB : Cf$ ist. T, t sind hier in eine gleiche Anzahl von Zeitpuncten getheilet, welche also alle einander gleich seyn müssen. Sind aber diese Theile wie $AB : Cf$, so ist dies nicht; sie musten sich verhalten wie $\frac{AB}{AC} : \frac{Cf}{CD} = \frac{AB}{nAB} : \frac{Cf}{nCf} = \frac{1}{n} : \frac{1}{n}$, woraus nochmahls gar deutlich erhellet, daß wenn man die Zeit ja mit in die Gleichung bringen wolte; sie sich directe verhalte wie die zu erregende, und inverse wie die wirkende Geschwindigkeit, welches im 16ten §. vorausgesetzet.

Zusatz 2. Aus dem bewiesenen erhellet, daß man die Kräfte zweier Körper A und B; die verschiedene Geschwindigkeiten besitzen, aber an Massen gleich sind, leicht so zerlegen könne, daß die quantitates motus, wie man sie gewönlich mißt die aus der kleinern entstehen, diejenigen übertreffen, welche von der grössern gewirket werden, wobey sie doch beyde zugleich ihre ganze Kraft verliehren. Man zerlege die Kraft, die A hat, mit der Celerität $= F$ in Bewegungen, deren Geschwindigkeiten $= \frac{1}{n} F$ sind; so werden daraus n^2 Bewegun-

gen entstehen, deren jede $= \frac{1}{n}$ F. A ist; also sind alle Bewegungen zusammengenommen $\frac{n^2.}{n} F \times A = nF \times A$. Die Geschwindigkeit des B sey G, und werde zerleget in Bewegungen, deren Geschwindigkeit $= \frac{1}{m}$ G; so ist die Summe derselben $mG \times B = mG \times A$. Wenn $m:n = F:G$, so sind die entstandene quantitates motus gleich; so bald aber $m:n$ grösser ist, als F zu G; so kan G kleiner seyn als F, und doch ist mG grösser als nF.

§. 19. Wenn wir das bisherige umkehren, und die entstandene Wirkungen als die Kraft ansehen; die vorige Kraft aber die Wirkung seyn lassen; so ist folgender Satz richtig: wenn verschiedene Bewegungen, in welchen die Massen gleich sind, rechtwinklicht zusammengesetzt und auf eine gleiche Maße verwendet werden, so ist $Ac^2 + Ad^2 + Af^2 + \text{etc.} = AC^2$; und sind c, d, f alle einander gleich, so ist $S. Ac^2 = AC^2$. Wollen wir diese gleichen Ac als gleiche Sollicitationen ansehen, so wird die Summe derselben allemahl seyn, wie das Quadrat der Geschwindigkeit, die unter den gesetzten Umständen hervorgebracht worden ist.

§. 20. So richtig dieses ist, und so nothwendig es vorhero festgesetzet werden muste; so wenig glaube ich doch, daß es einen Beweis a posteriori abgeben könne, der hinreichend sey, das Leibnitzianische Kräftenmaas algemein zu beweisen. Ich will nicht sagen, daß diejenige etwas gründliches dagegen einwenden, die mit aller Gewalt auch in diesen Fällen das Maas des Mersennus anwenden wollen; dadurch, daß sie die Zeit mit in die Rechnung bringen, binnen welcher diese Bewegungen hervorgebracht sind. Der Ungrund dieser Gedanken ist meiner Meinung nach in dem 16ten §. deutlich gezeiget. Allein es fallen nicht alle Schwie-

Schwierigkeiten hiemit weg. Wenn eine Masse mit der Geschwindigkeit = 2, vier solche Bewegungen produciren kan, dergleichen eben diese Masse mit der Geschwindigkeit = 1 nur eine einzige; so muß die Kraft nicht in derselben Richtung wirken, die sie hat, sondern schief; und eben so, wenn vier gleiche Bewegungen nur die Geschwindigkeit = 2 hervorbringen, deren eine einzige doch eben der Masse die Geschwindigkeit = 1. beibringt, so müßten sie so wirken, daß ihre Richtungslinien sich rechtwinklicht durchschneiden. Es ist die Frage, ob diese gesetzten Bedingungen, unter welchen das Maas durch das Quadrat der Geschwindigkeit mit der Masse vermehret, richtig ist, nothwendig sind, oder ob dieses Umstände sind, die in der Hauptsache nichts ändern, und nur aus Nebenursachen gesetzet werden müssen?

§. 21. Ehe ich mich auf die Beantwortung dieser Frage einlasse, muß ich, um einem Mißverstande vorzubeugen, folgendes anmerken. Es sey AB parallel der EC, und BC parallel der AE; HC der AG; ABC = AEG = EAB = ECB, sey ein rechter Winkel; so ist 1) begreiflich und nothwendig, daß ein Körper, wenn er von zweyen Geschwindigkeiten, einer AB nach der Richtung AB; der andern AE, nach AE getrieben wird, die Diagonal AC durchgehen müsse, und zwar mit der Geschwindigkeit AC, und wenn die Geschwindigkeiten AH und AG sind, die den Körper nach AG und AH zugleich treiben; so muß wieder der Körper die Diagonal AC durchlaufen, in eben der Zeit, in welcher er AG und AH besonders mit diesen Geschwindigkeiten AH, AG durchgegangen wäre, so daß seine Geschwindigkeit nunmehro AC ist. 2) Wenn der Körper A sich nach AB mit dieser Geschwindigkeit beweget, und ein andrer B von gleicher Masse mit der Geschwindigkeit AE trift an ihn rechtwinklicht, so findet B den A hier ganz in Ruhe, und kan ihm folglich entweder seine ganze Geschwindigkeit, oder die Helfte derselben mittheilen, nachdem man annimt, daß entweder die Bewegungs-

wegungsgesetze der elastischen, oder der harten Körper bey der Mittheilung der Bewegung statt finden, so daß daraus in dem A die zusammengesetzte Geschwindigkeit entstehe, welche durch die Diagonal ausgedrucket wird. Beide Partheien, sowohl die, welche dem Mersennus und Descartes als die, welche dem Leibniz folgen, sind hierinnen einig. 3) Aber wenn A mit der Geschwindigkeit AH nach dieser Richtung fortgehet, und A stoßt an ihn mit C = AG in der Richtung AG; so findet B den A nicht völlig in dieser Richtung in Ruhe. Löset man AG auf in GE und AE, die auf einander perpendiculair stehen, so wird B nur mit einem Theil seiner Bewegung AE den A in Ruhe finden, welche B dem A entweder ganz oder zur Helfte beibringen kan. Aber der Theil EG ist mit AH parallel. Es ist unausgemacht, ob der Geschwindigkeit des A nach AH, durch die Mittheilung des Stück EG um das gleiche Stück HB vermehret werde, daß also die Geschwindigkeit des A sey AB und AE = BC, woraus AC zusammen gesetzet wird? Die des Leibnitzens Maas annehmen, läugnen dies nothwendig, wie aus der Folge noch mehr erhellen wird, dahero man dies schon zum voraus als ausgemacht richtig nicht annehmen muß. 4) Das, was ich §. 12. n. 4. vorausgesetzet, daß nemlich ein Körper mit der Geschwindigkeit AC nach dieser Richtung AC, wenn er schief nach AB wirket, nach dieser Richtung AB nur so viel verrichte, als wenn er nach dieser Richtung die Geschwindigkeit A allein besässe, ist ungezweifelt und von beiden Seiten zugegeben: allein der Grund, warum eine einfache Bewegung in zwey perpendiculaire könne getheilet werden, so, daß die eine dem Körper, unbeschädigt der andern gänzlich entzogen werde, ist der gordische Knoten, dessen Auflösung zugleich die Frage des 20ten §. entscheidet. Maclaurin in seinem account of Sir Isaac Newtons philosophical discoveries, fält auf die Gedanken, der Körper A mit der Geschwindigkeit AC wirke in den Körper B, auf den er schief stosset nach AB, auch mit seiner Richtung. Es

werde nemlich durch die dem B mitgetheilte Geschwindigkeit nicht nur dem A ein Theil seiner Geschwindigkeit nach AC entzogen, sondern A werde auch von seiner Richtung abgebracht; dies sey die Ursache, warum die Geschwindigkeit AB in B entstehen könne, welche doch grösser sey, als die Geschwindigkeit, die A in seiner Richtung verlohren. Allein ich muß bekennen, ich verstehe hier entweder den tiefsinnigen Engelländer nicht, oder er hat sich ohnstreitig geirrt. Der Körper A hat nach AC die Kraft mit der Geschwindigkeit AC zu wirken; nach der Richtung AB mit der Geschwindigkeit AB, und zugleich mit BC nach dieser Richtung. Diese beiden leztern, die einander perpendiculair seyn müssen, nicht aber auf jede Art, wie Hr. **Mairan** geglaubet, gegen einander gesezet seyn, können wir zugleich beisammen uns in A vorstellen; aber nicht zugleich mit noch einer andern. Stellen wir uns in A die erste vor, so können wir nicht mit dieser noch eine andere verknüpft in ihm als wirksam uns vorstellen. Er kan nicht nach einer andern Richtung auch eine Kraft haben, damit wirken, und doch die nach AC behalten. Nur so ist es: Die Kraft nach AC mit dieser Geschwindigkeit ist so gut, wie jede zwo andere perpendiculaire zusammen, und davon will man den Grund wissen, den **Maclaurin** nicht gibt.

§. 22. Man nehme folgende Gedanken so lange als eine Hypothes an, bis ich erwiesen, daß sie mehr sind. Es ist an sich einer Kraft gleichgültig, eine einzige Geschwindigkeit AC zu erregen, oder zwey andere, deren eine AB, die andere BC ist, (ABC ist ein rechter Winkel), wenn die Massen wie vorhero gleich sind. Würde man aber den Körper A in der Richtung AC an einen andern stossen lassen, so würde man die eine AB von der andern BC nicht absondern können. Nur allein also dieses Endzweckes wegen muß A an den Körper B, dem er die Geschwindigkeit AB beibringen soll, nach der schiefen Richtung anstossen. Man stelle sich vor, A bringe dem B die Geschwindigkeit, successive bey in der Richtung AC; in dem Augenblick aber,

in welchem B den Grad der Geschwindigkeit AB erhalten, werde B vernichtet; so würde auch A in der Richtung AC die Geschwindigkeit BC übrig behalten. Wenn dem Körper, der mit der Geschwindigkeit = 2 in seiner Richtung einer gleichen Masse B diese Geschindigkeit ganz beibringt, der letzte B mitten in der Action, in dem Moment, in welchem seine erhaltene Geschwindigkeit = 1. ist, entzogen würde; so würde die Geschwindigkeit, welche in A zurück bleibt = $\sqrt{3}$ seyn, wie sie ist, wenn A in B schief wirkt; und wenn man dem A alsdenn einen andern ruhenden Körper wie B entgegensetzte, und auch diesen wegbrächte, wenn er die Geschwindigkeit = 1 überkommen, so würde A in einer Richtung vier ruhende Körper wie B nach einander die Geschwindigkeit = 1 beibringen, da doch A in einem B nur die Geschwindigkeit = 2 zu wirken im Stande ist. Zur Vermehrung des ersten Grads der Celerität in B um 1, gehört eben so viel, als die andere gleiche Geschwindigkeiten in dreien ruhenden Massen hervorzubringen. So daß also die in den vorhergehenden Lehrsätzen angenommene Bedingung, daß man die Richtungen nicht im Betracht ziehen wolle, wegbleiben könne; und die Auflösung der Bewegungen in perpendiculaire nur darum nöthig sey, daß die Theile einer Kraft nach Gefallen von einander abgesondert werden können, wodurch die innere Grösse derselben auf keine Weise eine Veränderung leidet.

Eben so werden vier nach einander in A wirkende Bewegungen, jeder mit der Geschwindigkeit = 1, da die Masse B dem A gleich ist, nur eine einzige Geschwendigkeit = 2, in A hervorbringen, wenn sie auch alle nach einander in derselben Richtung wirkten mit ihrer ganzen Force. Weil sie aber diese nicht völlig auf A anwenden können, ausgenommen die erste, die A ruhend vorfindet; so müssen sie unter rechten Winkeln mit einander verknüpfet werden, damit die von der vorhergehenden erregte Geschwindigkeit den folgenden nicht hindern, sich ganz auf A anzuwenden.

§. 23.

§. 23. Die Richtigkeit dieser Vorstellungen soll die Erfahrung beweisen. So paradox sie anfangs scheinen; so sehr wird ihre Wahrheit einleuchten, wenn man nur auf eine Weile die Einwürfe vergißt, welche ihrer scheinbahren Evidenz wegen uns verwirren können, bis das Fehlerhafte derselben dargethan. Ich kan zu dem Ende voraussetzen, daß man sich auf folgende von Polenio de Castellis, Gravesand, Muschenbroecken und andern mit aller Vorsichtigkeit angestellte und bekante Experimente verlassen könne; welche ich selber jetzo nicht nachmachen kan. Dergleichen sind diese:

1) Wenn zwey Körper von gleicher Masse und Grösse in eben den Thon mit verschiedenen Geschwindigkeiten herunter fallen, welche man ihnen durch den Fall von einer gewissen Höhe beibringt: so sind die Größten der Höhlungen oder Gruben, welche sie machen in eben der Verhältnis, in welcher die Höhen und die Quadrate der Geschwindigkeiten stehen.

2) Wenn zwey Körper am Umfang gleich; an Masse aber verschieden sind, und fallen herunter auf einen weichen Thon mit Geschwindigkeiten, deren Quadrate sich umgekehrt wie die Massen verhalten, so sind die eingedruckten Gruben gleich.

Es würden die Schlüsse, die aus diesen gezogen werden sollen, noch leichter als richtig erkant werden, wenn man mit diesen Experimenten noch folgende verknüpfen könte, die ich angeben will, ob ich sie gleich jetzo noch weniger als die vorhergehenden selber anstellen kan; und sie auch entbehrlich sind. Es kan auch seyn, daß diese wirklich schon von einem oder dem andern angestellet: ich erinnere mich aber jetzo nicht, sie irgendwo gelesen zu haben.

a) Man lasse denselben Körper, der eine cylindrische Figur hat, von derselben Höhe in verschiedene Arten von Thon, oder Talg, oder andern weichen Körpern, dergleichen man sich in den vorhergehenden Versuchen zu bedienen pfleget, herunter fallen. Die Härte und Zusammenhang der Theile

dieser weichen Körper müste verschieden seyn. Es müste vorhero ausgemacht werden, wie sich Bewegungen gegen einander verhalten, womit Schichten von gleicher Dicke durchdrungen werden können; die Maßen werden gleich gesetzt. und die Tiefen der von dem Fall der Körper von einer Höhe gemachten Gruben würden sich umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten dieser Bewegungen.

b) Man lasse zwey Körper von der vorigen Figur an Masse und Grösse gleich, fallen mit Geschwindigkeiten, die sich verhalten wie die gesetzten Bewegungen: so wird die Tiefe der gemachten Löcher gleich seyn.

§. 24. In diesen Versuchen sind die Umstände wircklich, die im 22. §. hypothetisch angenommen worden. Es ist unläugbahr, daß wenn ein Körper in den Körper ABCD, der homogen ist, wie in den vorhergehenden Versuchen der Thon oder eine andere weiche Masse angesehen werden kan, hineindringt, und ein Loch macht in der Figur abgh; die Zerreissung jeder gleich dicken Fläche von Fasern ab, cd, ef, als eine Hervorbringung gleicher Effecte, oder gleicher Bewegungen, in welchen beides, Massen und Celeritäten gleich sind, betrachtet werden könne. Denn da ab, cd, ef, alle mit gleicher Kraft zusammenhangen, so ist ohnstreitig, daß auf die Aufhebung dieser Kräfte auch gleiche Kräfte müssen verwendet werden, und es also so gut sey, als wenn zwo gleiche Bewegungen, deren Masse und Geschwindigkeit gleich, hätten gewirket werden sollen. Es wird dies freylich in der Erfahrung in der völligen Schärfe nicht richtig seyn, dahero auch in den Versuchen nothwendig Abweichungen entstehen müssen; theils wegen der mangelhaften Gleichförmigkeit in dem Zusammenhang der Theile der weichen Materien, theils wegen der Vermehrung der Festigkeit in den untern Schichten gh, ef, welche immer härter werden, je weiter der Körper hineindringt und diese niedern Theile zusammenpreßt: allein wenn die Eindrückung nicht starck ist, oder die Theile des Körpers, der zerrissen wird, frey weggehen können, oder doch nicht näher an einander gebracht werden, wie beim Holz, wenn eine Kugel hindurchfähr; so kan

ohne merklichen Irrthum immer gesetzet werden, daß die Menge der Fasern, die zerrissen werden, oder die Tiefe der Gruben proportionell sey der Summe gleicher Widerstände. Die gleichen Resistentien sind also hier, was in dem 22. §. die gleichen Bewegungen waren, welche durch die Kraft eines bewegten Körpers hervorgebracht worden, deren jede gleichen Theil der Kraft erfodern, so daß also die Kraft um desto grösser gewesen, je mehr solcher Resistentien sie überwunden. Diese Resistentien widerstehen der sie zerreissenden Kraft nicht weiter, als bis sie zerbrochen sind; und aus dieser Ursache können sie ihr in gerader Linie entgegen gesetzet werden, welches nach dem 20ten §. auch bey den gewirkten Bewegungen geschehen könte, wenn die in Bewegung gesetzte Körper, so bald sie den gehörigen Grad der Geschwindigkeit erhalten, der Wirkung des in sie agirenden entzogen, und andere ruhende von neuem der Kraft entgegen gesetzet würden.

§. 24. Es fält von selbsten in die Augen, daß die algemeine Formul $V = dE . S$ hier eben so bestimt werden muß, als vorhero bey den Bewegungen. dE sind hier die Resistentien, S die Tiefe der gemachten Höhlungen. Ist $dE . S = de . s$, wie in dem 2ten Experimente, so ist $V : v = MC^2 : mc^2$; und ist $dE = de$, so ist $S : s = MC^2 : mc^2$. Wäre $V = v$, also $dE \times S = de \times s$: so würde $dE : de = s : S$ seyn, und $s : S$ nach a. §. 22. wie die Quadrate der Geschwindigkeiten umgekehrt, die erfodert worden, gleiche dicke Schichten der weichen Materien zu zerbrechen. Ist $S = s$, so ist $MC^2 : mc^2 = dE : de$, das ist, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, die erfodert worden, die Kraft des Zusammenhangs zu überwinden $F^2 : G^2$; folglich wenn $M = m$, so ist $C : c = F : G$, aus welchen Schlüssen man sieht, daß der Ausgang des in b. §. 22. angegebenen Experiments auf die erwehnte Art erfolgen müsse; so wie dieser Versuch, wenn er angestellet, die Richtigkeit obiger Schlüsse beweisen würde.

§. 25.

§. 25. Es rechtfertiget sich in diesen Fällen das Maas des Hrn. von Leibniz so deutlich, daß auch die Gegner auf keine Weise das alte Kräftenmaas des Mersennus und des Cartes hier zu erhalten wissen, ohne zur Betrachtung der Zeit wieder ihre Zuflucht zu nehmen. Wenn der Körper A, sagen sie, mit der Geschwindigkeit = 2, vier solche Resistentien überwindet, dergleichen mit der Geschwindigkeit = 1. von eben der Masse B nur eine einzige weggeräumet wird, so gebrauche A dazu eine gedoppelte Zeit, wodurch das Maas des Mersennus erhalten wird, wenn man die Wirkung durch die Zeit theilet. Man kan diesen fast eben die Anmerkungen, die ich im 16ten §. gemacht, entgegen setzen. Es ist ihren eigenen Grundsätzen zuwider. Wir wollen zugeben, daß es sich mit der Zeit in diesen letzten Fällen, wegen der ununterbrochenen Action der Kraft verhalte, wie sie fodern, welches im 16ten §. bey dem, nicht in eins fortgehenden Wirken anders war: was wird folgen? Lasset V, v, die Kräfte; dV, dv, ihre Abnahmen, dS, ds die Elemente des Raums, oder der Summe der Resistentien seyn, und dT, dt die Differentiale der Zeit: so wird nach der Gegner Meinung $dV = \frac{dS}{dT} = dC$, und $dv = \frac{ds}{dt} = dc$; folglich $V : v = \frac{S}{T} : \frac{s}{t} = C : c$. Es sey $S = 4s$, und $T = 2t$, so ist $V : v = \frac{4s}{2t} : \frac{s}{t} = 2 : 1$, folglich $V = 2v$. Man theile $AB = S$, in vier gleiche s, als Ab, bc, cd, dB: so ist die Zeit, die erfodert wird, wenn v, ein s, oder Ab durchbrechen soll $= \frac{1}{4}T = \frac{1}{2}t$. Wäre V biß b gekommen in $\frac{1}{2}t$, so wäre seine Wirkung $\frac{s}{\frac{1}{2}t} = \frac{2s}{t}$, folglich doppelt so groß, als die Wirkung des v. Solte nun $V = 2v$ seyn,

und v durch die Wirkung $\frac{s}{t}$ erschöpfet werden, so müste ja V auf $\frac{2s}{t}$ gleichfals ganz angewendet seyn. Wie kan es denn noch durch drey s ferner dringen? Es hätte ja V auf diese Art nicht viermahl, sondern achtmahl so viel verrichtet als v, indem vier solche Wirkungen aus V entstanden, deren jede doppelt so groß war, als die ganze Wirkung des v. „Wir können mit Recht sagen, daß V seine „Wirkungen mit zwiefach so grosser Geschwindigkeit hervor„bringe als v; aber ein ganz anders ist es, seine Effecte selber sind zweymahl so groß als von v, welches letztere irrig ist. Nimt man das Durchdringen des Raums nicht gleichförmig an, so fält dis noch mehr in die Augen.

§. 27. Der Herr Mairan, der in seiner vortreflichen Abhandlung von der Schätzung und dem Maas der bewegenden Kräfte der Körper sich alle Mühe gegeben, diese Materie zu erschöpfen, gestehet, daß die Wirkungen, von der Bewegung eines mit doppelter Geschwindigkeit fortgehenden Körpers viermahl so groß sind, als von einer andern, dessen Geschwindigkeit einfach ist; allein er will nicht, daß die Summe dieser Effecte das Maas der Kraft abgeben soll, weil es etwas Zufälliges sey, und glaubt, man müste dieser ihre Grösse nur bestimmen aus dem, was sie in einer gewissen Zeit hervorbringe; der Körper mit der Geschwindigkeit = 2. wirke in gleicher Zeit nur doppelt so viel als ein anderer, der die Geschwindigkeit = 1 besitzet. Er setze aber seine Wirkung zweimahl so lange fort; dahero erfolge die Grösse, die dem Quadrat der Celerität proportionell ist. Die Ursache aber davon sey, weil die Resistentien nicht ihrer Menge und innerlichen Stärke nach, sondern der Zeit nach auf die Bewegung wirken, in welcher sie dem Körper sich entgegen setzen. Er verfällt dabey auf einen ganz besondern Maasstab, wornach er die Kräfte der Körper, welche in die Höhe steigen, in weichen Materien die Theile

aus

aus der Stelle treiben, und überhaupt gewisse Hindernisse überwinden schätzen will. Nicht der Raum, durch welchen der Körper gestiegen, sondern die, durch welche er zu steigen verwehret, und durch welche er von der Schwere heruntergezogen; imgleichen nicht die Hindernisse, die überwunden, sondern die wegen der Schwächung der Bewegung nicht haben durchdrungen werden können, sieht er als die Wirkung der widerstehenden Kraft an, wodurch die lebendige Kraft zernichtet sey. Ich kan mich jetzo hierüber nicht weitläuftig erklähren, dies will ich nur kurz erinnern, daß aus allen, was er vorbringet, nichts mehr folge, als daß einem in die Höhe steigenden Körper in gleichen Theilen der Zeit gleiche Geschwindigkeiten entzogen werden, und davon ist in diesem Streit die Frage nicht. Dies trägt eben so wenig zur Entscheidung der Sache bey, als wenn der gelehrte Ritter Louville uns zeigt, daß Körper, in welche die Schwere gewirkt, wenn ihre Bewegung in eine gleichförmige verändert wird, Räume in gleichen Zeiten beschreiben, die den Zeiten des Falls proportionel sind und ihren Geschwindigkeiten. Das ist gewiß, daß nicht die erlangten Geschwindigkeiten der Höhe, wovon sie herabgefallen, proportionell seyn: man frägt aber nach den Kräften.

Was die Grösse des Widerstands betrift, die **Mairan** den Zeiten proportionell setzet; so haben **Hausen**, den ich nicht nenne, ohne an seine Verdienste mit Hochachtung zu gedenken, und der berühmte **Herr Prof. Heinsius** eben dasselbe entgegengesetzt. Sie berufen sich auf das Gesetz der Mechanic R=Fdt, d. i. **der wirkliche Widerstand ist der widerstehenden Kraft und der Zeit zusammen proportionell**; aber wie ich mich überrede ohne Grund.

Es hat nemlich mit der gleichförmig widerstehenden und aufhaltenden Kraft eben die Beschaffenheit, wie mit der Schwere und allen vergeschwindernden Kräften, von welchen ich im 11ten §. geredet. Es ist das Zeichen der widerstehenden Kraft, um deren Natur man sich nicht be-

kümmert, weiter nichts als ein Zeichen, wodurch angezeiget wird, wie viel von der Bewegung eines Körpers in einer gewissen Zeit durch die Uhrsache des Widerstandes verlohren gehe. Wolte man es hier anwenden in dem Sinn der Herren Gegner, so würden Sätze folgen, deren Falschheit ausgemacht ist, und von allen zugegeben wird. Wenn der Körper A die Fasern, oder die auf einander liegende Flächen eines andern Körpers zerreißt, so würde nach diesem Grundsatz die erste Fläche weniger Widerstand thun, als die folgende, weil wegen der abnehmenden Geschwindigkeit des Körpers A, die Zeit, in welcher die Theile der ersten Fläche zerreissen, kleiner ist, als die Zeit, in welcher die folgende zerbrochen werden. Die Stärke, mit welcher die Flächen zusammenhangen, ist in allen gleich; setzen wir also, es soll die Zerreissung der ersten dem Körper weniger Kraft benehmen, als der zweiten; so müste, wenn wir statt der Zerreissung der Theile gleiche Bewegungen setzen, zu ihrer Hervorbringung in einer kürzern Zeit weniger Kraft erfodert werden, als zur Hervorbringung derselben in einer grössern. Dies ist dem Grundsatz: Die Wirkung ist der Gegenwirkung gleich, nach der eigenen Erklährung dieser Mathematiker gerade entgegen; wie auch dem vorgedachten Grundsatze, den sie annehmen, daß die verwandte Kraft um desto grösser, nicht aber kleiner sey, je kleiner die Zeit ist, in welcher die Wirkung hervorgebracht wird, wenn diese gleich bleibet. Ein Spinngewebe müste, wenn es zerrissen wird, einer Kanonenkugel weniger Kraft entziehen, als eben dieser Kugel, wenn sie langsam hindurchfährt, und doch wäre, wann man die erwehnte Regul voraussetzet, die Wirkung im ersten Fall grösser als im letzten.

§. 28. Wollen wir die Natur der Kräfte nicht nach unsern willkührlichen Begriffen, sondern diese jener gemäß einrichten; so lehrt uns das, was von der widerstehenden Kraft im 25. 26. §. gesagt, wie wir uns von ihr eine wahre Vorstellung machen müssen. Ist die Kraft gleichförmig durch den Raum AB vertheilet, so wendet sie

auf

auf die Vernichtung der Bewegung eines Körpers in gleichen Theilen des Raums gleich viel Kraft an. Die Geschwindigkeit nimt aber nicht mit der Kraft ab, nicht weil die Kraft nicht ganz auf den sich bewegenden Körper wirkt, sondern weil $dc = \frac{dv}{c}$ ist, dahero $c^2 = v$, oder der Summe der gleichen widerstehenden Kräfte. Wenn man die Bewegung, die vernichtet wird, schätzen will nach der Masse und Geschwindigkeit, die da ist, und der Verminderung der Geschwindigkeit, so kan man sagen, daß der Widerstand der destruirten Bewegung proportionell sey. Dies gilt allgemein von einer jeden gleichförmig widerstehenden Kraft, und also auch beym Aufsteigen der schweren Körper, in welchen Fällen aber $dc = \frac{dv}{c} = \frac{dv}{t} = dt$ ist; also die Geschwindigkeit sich vermindert wie die Zeiten. Man siehet hieraus, daß die Formul $dc = dt$, oder $R = fdt$ eine Folge der algemeinen $dc = \frac{f.dv}{c}$ sey.

Auf eine gleiche Art muß man sich also die vergeschwindernde Kräfte vorstellen, dergleichen die Schwere und übrige vires centripetæ sind. In jedem Punct des Raums empfängt der von ihnen getriebene Körper einen Ruck, der dem ersten gleich ist. Aber jede folgende Sollicitation vermehrt die Geschwindigkeit immer weniger. Es ist nemlich $\frac{dv}{c} = dc$, und der Körper widersteht mit seiner schon erlangten Geschwindigkeit der weitern Vermehrung derselben. Aus dieser Formul folgt wiederum die andere $dc = fdt$, weil $\frac{f.dv}{c} = \frac{f.dv}{t} = fdt$ ist. Ich weiß wohl, daß auch hier letztgedachte Männer, welche zugeben, daß die Summe der gleichen Eindrücke dem Raum, oder daß die scalavirium dem Quadrat der Ge-

Geschwindigkeit proportionell sey, einwenden; es könten die folgende Sollicitationen, wegen der Geschwindigkeit, womit der Körper schon fortgeht, nicht mit ihrer ganzen Force in ihn wirken, und dieses sey die Ursache, daß die Geschwindigkeit nicht wie der Raum wachse: es habe zwar eine Kraft gewirket, die wie das Quadrat der Geschwindigkeit sey, aber nicht in den fallenden Körper, dahero man in diesem die ganze Kraft nicht suchen müsse. Man muß gestehen, es folge hieraus gar richtig, daß zum Erweis des leibnizianischen Kräftenmaas es noch unzureichend sey, wenn man mit Herman und Gravesand darthut, daß die Summe der Sollicitationen, die den Körper vergeschwindern, dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionell seyn. Weiter aber folgt auch nichts. Der Einwurf ist nunmehr leicht zu heben. Man bedenke: 1) daß es unbegreiflich sey, warum die Sollicitation in dem Punct b des Weges AB, den der fallende Körper A nimt, nicht ihre ganze Force anbringen solte. Sie wirkt just in A in dem Moment, in welchem A in b komt, und es ist so gut, als wenn sie A hier in Ruhe findet. Der Druck soll A nicht verfolgen, wie bey dem Stoß eines geschwindern Körpers in einen langsamern. Denn in dem folgenden Punct wirkt schon eine andere Sollicitation, und es verhält sich hier wie bey dem Stoß der Körper unter einem rechten Winkel (wie im 22. §.). 2) Wenn A nicht wirklich die ganze Force der Sollicitationen in AB im Herunterfallen erhalten, wie kan er denn wieder so hoch steigen, als er gefallen ist? Er begegnet nunmehro allen Sollicitationen in gerader Linie. Kan man im geringsten sich vorstellen, daß seine Geschwindigkeit ihm helfen werde? so daß er nicht nöthig habe, ihren Widerstand ganz zu überwinden; oder werden die Eindrücke der Schwere der Bewegung eines Körpers weniger beym Aufsteigen widerstehen, als sie im Herunterfallen befördern?

§. 29. Die Art, deren ich mich bisher bedienet, durch Schlüsse aus den Erfahrungen das Kräftenmaas des

Hrn.

Hrn. v. Leibniz zu bestätigen, scheint mir mit mehrerer Ueberzeugung verknüpft zu seyn, als wenn man mit Herman, Gravesand und Joh. Bernouilli aus angenommenen Fictionen den Beweis führet, ob diese gleich wohl getroffen, und der Natur der Sache gemäß sind. Von den Beweisen der beyden ersten a priori habe ich im vorhergehenden §. im vorbeygehen, so viel als nöthig, erinnert. Ihre Gründe, die sie aus der Erfahrung anführen, sind vorhero da gewesen, oder so geführt, daß die Erinnerungen des 20ten und des 27ten §. noch unentkräftet sind. Herr Bernouilli vergleicht in s. discours sur le mouvement, und s. differt. de vera notione virium vivarum, die man beide im dritten Bande seiner gesamten Werke vorfindet, die Pressiones, wodurch in dem Körper, wenn keine Hindernisse vorhanden, die Geschwindigkeiten und Kräfte entstehen, mit den Eindrücken, die eine Reihe elastischer gleich gespannter Feder zween Körpern beybringen würde. Man setze zwo Reihen solcher gleich stark gespanter elastischen Federn, deren eine AC, aus a; die andere CB aus b Federn bestehen: wenn die Spannung gehoben, so lasse man jede Reihe, die mit einem Ende unbeweglich sind, mit dem andern Ende wirken in Körper A, B. Ist A = B, so werden die eingedruckte Kräfte sich verhalten wie a : b, und also auch die Geschwindigkeiten; sind aber die Maßen ungleich, so ist die durch jede Feder besonders gewirkte Bewegung, als die Wirkung einer einzigen Sollicitation gleich; wenn C, c, die Geschwindigkeiten von A, B, sind, so ist die von einer Feder gewirkte quantitas motus AC = Bc; folglich wenn diese Verhältnis mit der vorhergehenden zusammengesetzet wird; so ist die Kraft des einen Körpers A, zur Kraft des B, wie a × AC : b × Bc. Dies ist der Grund seiner beiden a priori gegebenen Beweisen. Bey der Mittheilung der Bewegung von A auf B, ist nach Bernouillis Meinung beständig a : b = B : A = C : c; folglich sind die Kräfte wie $AC^2 : Bc^2$. Er hält sich, von der Richtigkeit seiner Schlüsse so sehr über-

zeuget, daß er nicht begreifen kan, „wie auch der hartnä„ckigeste Gegner, und wenn er auch ein Scepticus wäre, „sie bezweifeln könne. Allein aller Hochachtung ohnerachtet, die man diesem grossen Analysten schuldig ist, gestehe ich, daß ich mit vielen andern die vermeinte Evidenz hier nicht finde: denn nicht zu sagen, daß das, was er von den Wirkungen gespanter Federn erweiset, auf alle Körper und die Mittheilung der Bewegung überhaupt, ohne vorauszusetzen, daß alle Körper elastisch sind, nicht angewendet werden kan; so bleibt noch immer der Einwurf übrig, den der Hr. Prof. Heinsius gemacht, daß nemlich nicht jede Feder bey ihrer Ausdehnung in den Körper mit ihrer ganzen Kraft wirke. Von der ersten ist dies richtig; die zweite findet schon einen mit Geschwindigkeit begabten Körper vor, und nun ist die Frage, ob sie alsdenn völlig auf ihn kan verwendet werden. Es komt nicht darauf an, wie viele gleiche Sollicitationen wirken, sondern mit wie vieler Kraft sie in den Körper agiren, und wie viel lebendige Kraft dieser also erhalte? Herr Bernouilli hat ohnstreitig Recht; nicht aber wegen seiner Fictionen, sondern der Gründe wegen, die in den vorhergehenden vorgebracht sind.

§. 30. Nunmehro ist es Zeit, daß ich auch auf die Einwürfe komme, die man als die bündigsten angesehen hat, dem Herrn von Leibnitz und seinen Anhängern die Unrichtigkeit seines angenommenen Kräftenmasses zu zeigen. Sie sind gröstentheils sehr scheinbar, und wären unwiderleglich, wenn es wahr wäre, was viele glauben, daß beide Partheyen in den ersten Grundgesetzen der Bewegung übereinstimmen. Die Quelle aller Gegengründe sind folgende zwo Säze: Ein bewegter Körper wirkt nur in einen andern mit seiner respectiven Geschwindigkeit; der zweite: Vermöge des Grundsatzes, daß die Gegenwirkung der Wirkung gleich sey, müssen die Veränderungen in den Bewegungen der beiden Körper gleich seyn; und folglich so viele Be-

wegung in dem einen entstehet, so viel müsse in dem andern nach der entgegengesetzten Richtung verlohren gehen. His actionibus sagt Neuton, dem Keil, Maclaurin und die übrige folgen, (actione sc. et reactione) æquales fiunt mutationes, non velocitatum sed motuum - - - Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales. Nimt man diese beiden Naturgesetze mit der gegebenen Erklärung an, so sehe ich nicht, womit man die Stärke folgender Einwürfe schwächen wolle.

1) Den ersten trägt Maclaurin vor in seinem 2ten Buch der treatise of Fluxions, und in seinem account of philosophical discoveries &c. Man setze zwey Körper A und B, welche an Maße einander gleich auf einer Fläche, die sich mit der Geschwindigkeit = 1 beweget, in der Richtungslinie der bewegten Fläche ruhend liegen, und durch eine gespante elastische Feder, die zwischen beide ist, in einer Entfernung gehalten werden. Es ist die absolute Geschwindigkeit des A und B gleich, weil sie beide mit der absoluten Geschwindigkeit der Fläche fortgehen: in Absicht auf die Fläche aber haben sie keine relative Geschwindigkeit: nun lasse man die Feder sich ausdehnen, und dem A und B werden ohnstreitig gleiche Geschwindigkeiten, e. g. die = 1 sind auf der Fläche nach entgegengesetzten Richtungen eingedruckt. Es hat diese Feder bey ihrer Ausdehnung auf beide Körper mit gleicher Kraft gewirket, und ihnen also gleiche Kraft beigebracht. Man sehe aber, welches ihre Wirkungen in A und B gewesen? A bewegte sich vordem nach der Richtung der Fläche mit der absoluten Geschwindigkeit = 1. jetzo aber, da A von der Feder ausserdem die respective Geschwindigkeit = 1. erhalten; ist seine absolute Geschwindigkeit = 2. Vorhero hatte es nach dem leibnitzianischen Maaß die absolute Kraft = A × 1; nachhero die Kraft = 4A; seine absolute Kraft war folglich von der Feder um 3A vergrössert. B hatte

vor der Wirkung der Feder auch die absolute Kraft = 1. nachhero, da es sich auf der Fläche in entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit = 1. rückwärts bewegt, und von der Fläche selber mit der Geschwindigkeit = 1. vorwärts gebracht wird; so ist evident, daß B absolut ruhe, und daß also durch die Kraft der Feder in B die absolute Kraft = 1 entstanden, da doch durch eben eine so grosse Kraft in A, die Kraft 3A, das ist die Kraft 3B entstanden? wo bleibt also die Gleichheit der Kraft und der Wirkung? Messen wir mit dem Mersennus, so hat alles seine Richtigkeit. Und überhaupt, es sey die Geschwindigkeit die Fläche = m, und beide Körper erhalten von der Feder die Geschwindigkeit = n; so wird die Geschwindigkeit des einen A, $m+n$; des andern B, $= m-n$; die hinzugesetzte absolute Kraft in dem einen wäre $2mn+n^2$; und der Verlust dieser Kraft in dem andern $2mn-n^2$; da doch beide Wirkungen von gleichen Kräften entstehen, und also gleich seyn solten.

2) Wenn die obige Vorstellung im 22ten §. richtig wäre, und nachdem ein Körper A mit der Geschwindigkeit = 1 diese Geschwindigkeit = 1. dem gleichen B beigebracht, auf B nochmahls dieselbe Bewegung verwendet würde: so würde im zweitenmahl die in B entstandene Bewegung, der in A verlohrnen nicht gleich seyn. B erhält im erstenmahl die Geschwindigkeit = 1; da A zur Ruhe gebracht wird, im zweitenmahl, da A eben die Bewegung verliehret, erhält B die Geschwindigkeit = $\sqrt{2}$; also war der Zusatz in B $\sqrt{2}-1$. kleiner als 1; wodurch der Grundsatz: die Wirkung ist der Gegenwirkung gleich, umgestossen wird.

3) Laß A sich nach AH mit der Geschwindigkeit AH bewegen: in A werde er von einem andern B, der ihm am Maße gleich ist, mit der Geschwindigkeit AG nach AG gestossen. Wenn B nach dem Stoße ruhet; so wird A durch die Diagonal des Parallelograms der Kräfte AGCH mit der Geschwindigkeit AC fortgetrieben. Die

Kraft

Kraft des A ist also A × ACq. Man ziehe auf AH verlängert von C die CB perpendiculair; von A auf GC auf A die AE perpendiculair. Es ist also A × ACq = A (AEq + GEq + 2GE . GC + GCq), grösser als A × AGq, + GCq wie sie seyn solte. Die Kraft des Körpers nach AG sey zerlegt in AE und GE; der Theil AE = BC ist unverändert geblieben; der Theil GE, oder die Geschwindigkeit des B, in so ferne seine Bewegung mit der Bewegung des A nach AH parallel war, hat in dem Körper A die Geschwindigkeit nach der Richtung AH um HB = GE vermehret. Es solte aber die Geschwindigkeit des A nach der Richtung AH, wenn das jetzt vertheidigte Kräftenmaas richtig wäre, sein = $\sqrt{}$AHq + GEq); und ist grösser.

Es ist nicht nöthig, die übrige diesen ähnlichen Einwürfe anzuführen. Sie werden alle wie diese aus einer Erklährung der im vorigen §. angeführten Naturgesetze entstanden seyn, die man nicht annehmen kan; dahero sie auch alle fast auf eine Art gehoben werden können.

§. 31. Zum voraus muß ich aber eine Erinnerung machen, die den Vorwurf von mir ablehnen soll, den ich andern machen werde. Wenn man den Weg genau betrachtet, den ich genommen, das Maas der lebendigen Kräfte des Hrn. v. Leibniz fest zu setzen; so wird man finden, daß der Beweis desselben ganz unabhängig von dem sey, was noch auf eine Art zwischen beide Partheyen streitig ist, und nicht ehe entschieden werden kan, bis die eine oder die andere der beiden Arten die Kräfte zu messen als richtig ausgemacht sey. Es sind gröstentheils Erfahrungen und evidente von allen zugegebenen Axiomata, die ich im 12ten §. vorausgesetzet. Diese sind auch richtig, es mag die von den Gegnern gegebene Erklährung der beiden Reguln: die Wirkung ist der Gegenwirkung gleich, und die Körper wirken nur in einander mit ihrer respectiven Geschwindigkeit, oder die andere, die ich hernach anführen will, wahr seyn. Es ist folglich kein Cirkul im Beweisen begangen, wenn ich

ich aus dem ausgemachten Kräftenmaas nunmehro erst den wahren Verstand dieser beiden Gesetze festsetze; und es fält die Beschuldigung weg, als beweise man die Richtigkeit des bisher vertheidigten Kräftenmaas aus Grundsätzen, deren Wahrheit von der Richtigkeit jenes Maasses erst eine Folge ist. Die Herren Gegner machen es just so. Diese bestimmen den Sinn der angeführten Reguln nach ihren Kräftenmaaß, und erweisen dieses aus jenen, wie sie sie erklährt haben.

§. 32. Was die erste Regul betrift: **die Wirkung des Körpers A in den Körper B hängt nur ab von seiner respectiven Geschwindigkeit**: so ist ohnstreitig, daß A in B nur allein mit seiner respectiven Geschwindigkeit, oder mit dem Ueberschuß seiner Geschwindigkeit über die Geschwindigkeit des B auf ihn stossen und in B wirken könne. Daraus aber folgt nicht, daß A in B nur wirke, als ein Körper von seiner Maße mit dem Unterscheid der Geschwindigkeiten in einen ruhenden B, und daß also die Kraft des A in B diesem Unterschied proportionell sey, wenn die Massen gleich sind. Wenn die Geschwindigkeit des A = 3 ist, und des B seine = 2, so wird A in B wirken, als ein Körper, der den dritten Grad der Geschwindigkeit, nicht aber bloß als ein Körper, der einen Grad überhaupt besitzet, in einen ruhenden B. Aus den vorigen aber ist klar, daß den dritten Grad der Geschwindigkeit in A hinzuzusetzen und wegzunehmen weit mehr Kraft erfodert werde, als ihm den ersten Grad zu geben oder zu nehmen. In so fern sind **Joh. Bernouillis** etwas unbestimte Ausdrücke richtig, wenn er sagt: la força du choc, ou l'action des corps les unes sur les autres depend uniquement de leurs vitesses respectives, welche **Maclaurin** in seinem treatise zu seinem Vortheil auf eine andere Art ausleget. Die Grösse der Wirkung der Körper in einander beym Stoß hängt eigentlich ab von dem Unterscheid ihrer Kräfte. Es ist also $AC^2 - Bc^2 = A \times 9 - B \times 4$ gleich der Kraft, womit A in B wirket. Ist A = B, so

geht

geht dieser Unterscheid der Kräfte in B über, (man entschuldige diesen sinnlichen Ausdruck) wodurch die Kraft in B nach der Wirkung gleich wird $Bc^2 + Ac^2 - Bc^2 = AC^2 = BC^2$. In A bleibt $AC^2 - AC^2 + Bc^2 = Bc^2 = Ac^2$; oder die Geschwindigkeiten verwechseln sich. In diesem Fall ist auch allemahl die Zunahme der Geschwindigkeit in B, dem Verlust der Geschwindigkeit in A gleich. Es ist die in B hinzugesetzte $= C - c$, und die in A verlohrne eben so groß. Sind aber A und B ungleich, und ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoß a, b; nach demselben x, y; so ist wiederum zwar $Aa^2 - Ax^2 = By^2 - Bb^2$; allein nicht $a - b = y - b$; sondern $a - b : y - b = A + B : 2A$, und $a - b = x - y$.

§. 33. Dem zweiten Gesetz, der gleichen gegenseitigen Wirkungen, können wir im algemeinen mit Grunde keinen andern Verstand geben, als diesen: **Die Kraft, womit A in B wirkt, ist der Kraft gleich, welche dem A benommen wird; oder die Kräfte, mit welchen die Körper nach entgegengesezten Richtungen getrieben werden, sind einander gleich;** es sind nur besondere Fälle in welchen wir statt der Kräfte Bewegungen zu setzen befugt sind, wenn wir nemlich die letzten auf die gewöhnliche Art durch ein Product aus der Masse in die Geschwindigkeit ihrer Grösse nach bestimmen. Es wäre jetzo zu weitläuftig, diese aus einander zu setzen.

§. 34. Hieraus lässet sich nunmehro die Schwäche der im 30sten §. beigebrachten Einwürfe ersehen. Der zweite fällt augenscheinlich weg, vermöge des 32. §. und es ist unnöthig, es weitläuftiger zu zeigen. In dem dritten wird ohne Grund angenommen, daß die Geschwindigkeit des A nach den Stoß AC werde, oder der Diogonallinie gleich (man sehe die vorige Figur beym 30sten §.). Man löse die eine Kraft AG auf in zween andern AE und GE; so ist klar, daß B, der mit AG in dem Punct A an den Körper A stieß, nur mit der perpendiculaire AE in den Körper B hat wirken können; wodurch denn die Geschwin-

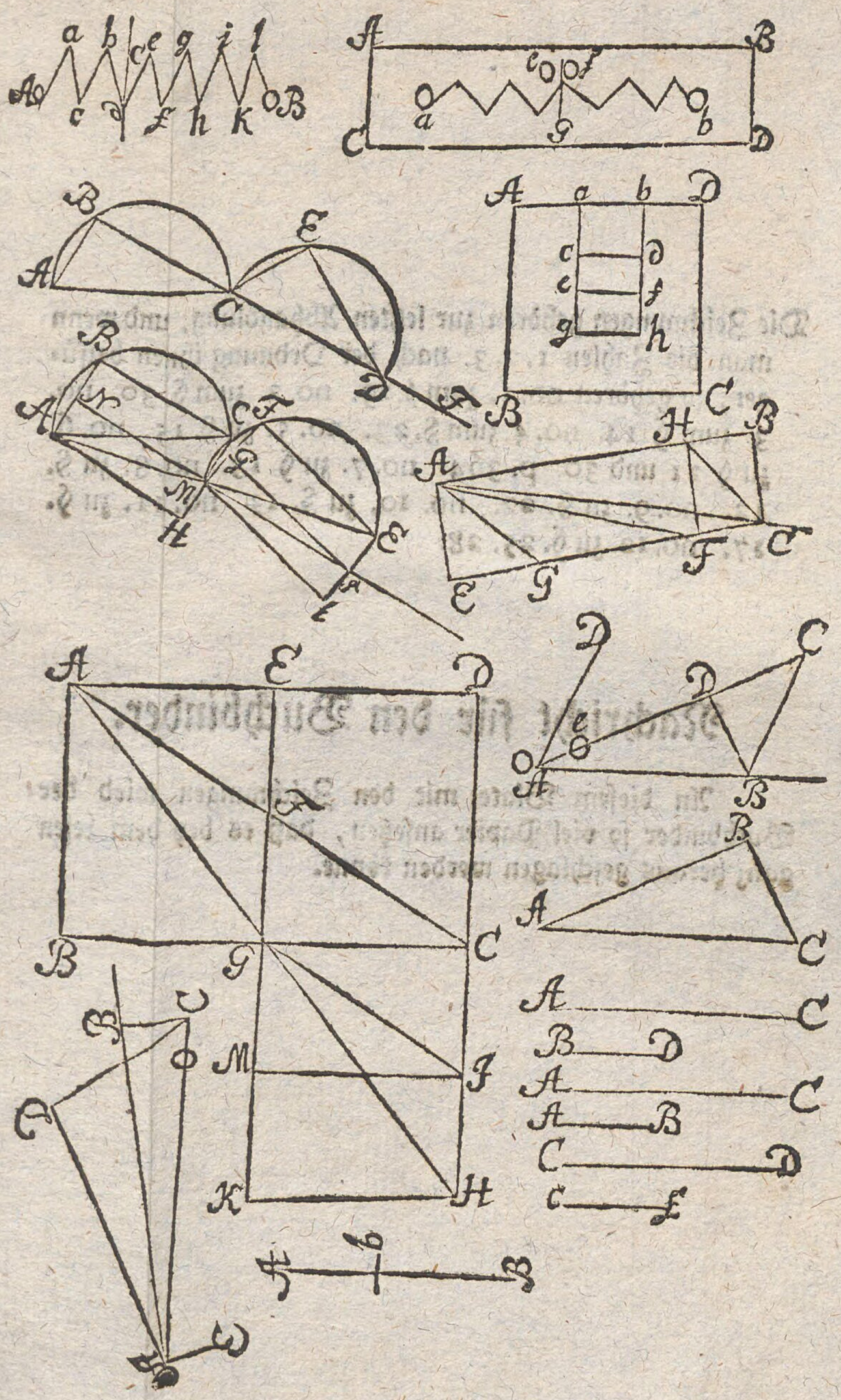
schwindigkeit des A nicht die Diagonal AC, sondern der Diagonal AF, des Parallelograms AHFE gleich geworden. Mit dem Theil GE hat B gar nicht in A wirken können; dahero denn B nach den Stoß in der Richtung AH die Geschwindigkeit EG = HB hat behalten müssen. Es ist also das Phänomenon nicht richtig, woraus man durch Schlüsse den Einwurf herleitet. In ähnlichen aus der zusammengesetzten Bewegung hergenommenen Gründen, wodurch das Maas des **Leibniz** hat umgestossen werden sollen, pflegt man gleichfals Säze, dergleichen n. 3. ist im 21sten §. als unleugbar zum Grunde zu legen; die weder aus der Erfahrung, noch durch irgend einen andern Beweis können dargethan werden, bis man ausgemacht, daß die Kraft eines Körpers seiner Bewegung gleich sey. Man muß die Geseze elastischer Körper, die **Joh. Bernouilli** in seinem angeführten discours sur le mouvement entwickelt, als die wahren Naturgeseze ansehen; deren Richtigkeit nicht bloß davon abhängt, daß *alle* Körper elastisch sind, sondern auch aus dem erwiesenen Maas der lebendigen Kräfte als Folgen können hergeleitet werden.

§. 35. Des scharfsinnigen **Maclaurins** Einwurf scheint Anfangs sehr stark zu seyn. Man kan nicht läugnen, daß in den vorhero gesezten Umständen von der Kraft der Feder, wenn sie sich zu beiden Seiten ausdehnt, in den zwey Körpern A und B, welche auf der sich bewegenden Fläche ruhen, gleiche Geschwindigkeiten nach entgegen gesezten Richtungen entstehen solten. Dadurch wird denn nothwendig die absolute Geschwindigkeit des einen = 2; und seine Kraft = 4; des andern absolute Geschwindigkeit aber = 0, und seine Kraft auch = 0. Allein eine Frage ist zurück: Hat auch die Feder auf beide Körper mit gleicher Kraft gewirket? Dies scheint dem genanten Geometer ganz ausgemacht und unläugbar: ist aber doch in der That irrig. Es sey ABCD die bewegliche Fläche, welche mit der Geschwindigkeit = 1 nach der Richtung BA fortgehe:

gehe: a und b ſind die auf der Fläche reſpective ruhende Körper, und C iſt die zwiſchen ſie geſetzte Feder. Man ſetze, um die Unrichtigkeit deſſen, was Maclaurin vorausſetzet, deſto geſchwinder einzuſehen, ſtatt der Feder zwey Körper e und f, die einander und a und b gleich ſind, und gleichfals ruhen. Nun laſſe man dieſe e und f durch einen zwiſchen ſie gebrachten Stoß nach entgegengeſetzten Richtungen mit gleichen Geſchwindigkeiten von einander treiben. e nach a, und f nach b, mit der reſpectiven Geſchwindigkeit = 1. Es iſt nothwendig, ſowohl nach unſern als Maclaurins Grundſätzen, daß e dem a, und f dem B die reſpectiven Geſchwindigkeiten = 1 beybringe, und beide e, f nach volbrachtem Stoße ruhen; ſo daß auf dieſe Art eben daſſelbe erfolge, was vorhero durch die Feder ausgerichtet wurde. Die erhaltene reſpective Geſchwindigkeiten des a und b ſind gleich, und alſo auch ihre reſpectiven Kräfte. Aber die abſoluten Kräfte ſind in a = 4; in b = 0; ſo daß dem a die Kraft = 3 mitgetheilet, dem b die Kraft = 1 benommen worden, wie Maclaurin richtig behauptet. Aber war denn die abſolute Kraft des e der abſoluten Kraft des f, womit die abſoluten Kräfte des a und b geändert worden, aequal? Laſſet uns erſtlich f, vor uns nehmen. Als f mit der relativen Geſchwindigkeit = 1. ſich nach b bewegte, war dieſes f wegen der Bewegung der Fläche mit gleicher Geſchwindigkeit nach der entgegengeſetzten Seite abſolute ruhend; b kam auf ihn zu mit der abſoluten Bewegung = 1 und alſo der abſoluten Kraft = 1; mittheilte dem f dieſe abſolute Kraft, wodurch f die relative Ruhe erhielte: b kam dadurch zur abſoluten Ruhe, und erhielt die relative Bewegung von A nach B mit der Geſchwindigkeit = 1. Anders verhielt es ſich mit e. Dieſer Körper ſtieß auf a, mit der abſoluten Kraft = 4, indem es die relative Geſchwindigkeit auf der Fläche nach BA hatte. Der Körper a beſaß die abſolute Kraft = 1. Mit dem Unterſchied der abſoluten Kräfte = 3. wirkte alſo e auf a; dahero a nothwendig den Zuſatz = 3 erhalten muſte.

Die elastische Feder C werde nunmehro wieder an die Stelle der beiden Körper e, f gesetzet. Diese wird wie a und b von der Fläche mit fortgetrieben, und hat also eine absolute Bewegung. Sie wirkt dahero auf a und b nur blos relative, wenn wir die Fläche als ruhend ansehen, mit gleicher Kraft; aber nicht absolute. Indem nemlich die Helfte der Glieder von C nach B aus einander springt; so sind diese Glieder während des Ausdehnens und der Wirkung in b in einer absoluten Ruhe: die andere Helfte aber von C nach a hat eine Geschwindigkeit = 1. von ihrer ausdehnenden Kraft, und noch eine von der Bewegung der Fläche nach der Richtung Ca. Was Wunder also, daß die absolute Kraft des Körpers a um 3 vermehret wird; da die Feder von ihrer absoluten Kraft = 4 nach der Wirkung nur die Kraft = 1. übrig behalten? In der That könte aus dieser Fiction, die Maclaurin für die simpelste und evidenteste hält, unsern Grundsaz von den lebendigen Kräften umzustossen, ein neuer Beweis gezogen werden, sie zu unterstützen, wenn es nöthig wäre, oder wenn man Lust hätte, sich solcher Gründe, die auf erdichtete Fälle beruhen, zu bedienen.

§. 35. Mit dem Maasse der lebendigen Kräfte hat es also, wie ich glaube, seine Richtigkeit. Nun wäre die Frage noch übrig, ob die Grösse der lebendigen Kraft bey der Mittheilung der Bewegung beständig erhalten werde? und wie weit sich überhaupt in der Natur das principium conservationis virium vivarum erstrecke? Die Beantwortung derselben hat ihre besondere und mir bishero noch unauflösliche Schwierigkeiten, und erfodert eine eigene Abhandlung; vielleicht einmahl bey einer andern Gelegenheit davon etwas mehreres.



A a b c e g i l B c d f h k
A B C D e f a b g
A B C D E F
A a b D c d e f g h B C
A B C F N M H G E D L
H B A C F E G
A E D F B G C M I K H
D C D e A B
B A C
A C
B D
A C
A B
C D
c f
A b B

Die Zeichnungen gehören zur letzten Abhandlung, und wenn man die Zahlen 1. 2. 3. nach der Ordnung ihnen beifüget, so gehören no. 1. zum §. 29. no. 2. zum §. 30. no. 3. zum § 14. no. 4. zum §. 24. no. 5. zu §. 15. no. 6. zu §. 21 und 30. p. 364. no. 7. zu §. 13. no. 8. zu §. 12. no. 9. zu §. 22. no. 10. zu §. 13. no. 11. zu §. 17. no. 12. zu §. 25. 28.

Nachricht für den Buchbinder.

An diesem Blate mit den Zeichnungen wird der Buchbinder so viel Papier ansetzen, daß es bey dem lesen ganz heraus geschlagen werden könne.

Herrn Edmund Halley Tafel der Laufbahn, der von ihme berechneten Cometen.

Anni	Nodus ascendens	Inclinatio orbitæ	Perihelium in orbe	Perihelium in ecliptica	Latitudo Perihelii	Distantia Perihelii	Logarithmus Distantiæ	Tempus Perihelii
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	°			d h ′
1337	♊ 24:21:0	32:11:0	♉ 7:59:0	♉ 12:45:15	22:40:30 B	40666 R	9,609236	Jul. 2:6:2
1472	♑ 11:46:20	5:20:0	♉ 15:33:30	♉ 15:40:20	4:25:50 A	54273 R	9,734584	Febr. 28:22:23
1531	♉ 19:25:0	17:56:0	♒ 1:39:0	♒ 0:48:15	17:3:5 B	56700 R	9,753583	Aug. 24:21:18$\frac{1}{2}$
1532	♊ 20:27:0	32:36:0	♋ 21:7:0	♋ 16:59:40	15:17:0 B	50910 D	9,706803	Oct. 19:22:12
1556	♍ 25:42:0	32:6:30	♑ 8:50:0	♑ 11:6:0	31:10:20 B	46390 D	9,666424	Apr. 21:20:3
1577	♈ 25:52:0	74:32:45	♌ 9:22:0	♍ 7:53:0	69:35:20 A	18342 R	9,263447	Oct. 26:18:45
1580	♈ 18:57:20	64:40:0	♋ 19:5:50	♋ 19:17:10	64:40:0 B	59628 D	9,775450	Nov. 28:15:0
1585	♉ 7:42:30	6:4:0	♈ 8:51:0	♈ 8:59:10	2:55:25 A	109358 D	10,038850	Sept. 27:19:20
1590	♍ 15:30:40	29:40:40	♏ 6:54:30	♏ 2:55:50	22:45:50 A	57661 R	9,760880	Jan. 29:3:45
1596	♒ 12:12:30	55:12:0	♏ 18:16:0	♏ 22:44:35	54:44:30 B	51293 R	9,710058	Jul. 31:19:55
1607	♉ 20:21:0	17:2:0	♒ 2:16:0	♒ 1:29:40	16:10:5 B	58680 R	9,768490	Oct. 16:3:50
1618	♊ 16:1:0	37:34:0	♈ 2:14:0	♈ 6:10:0	35:50:0 A	37975 D	9,579498	Oct. 29:12:23
1652	♊ 28:10:0	79:28:0	♈ 18:18:40	♊ 10:41:35	58:14:0 A	84750 D	9,928140	Nov. 2:15:40
1661	♊ 22:30:30	32:35:50	♋ 25:58:40	♋ 21:37:30	17:17:0 B	44851 D	9,651772	Jan. 16:23:41
1664	♊ 21:14:0	21:18:30	♌ 10:41:25	♌ 8:40:35	16:1:50 A	102575$\frac{1}{2}$ R	10,011044	Nov. 24:11:52
1665	♏ 18:2:0	76:5:0	♊ 11:54:30	♉ 24:6:35	23:8:0 B	10649 R	9,027309	Apr. 14:5:15$\frac{1}{2}$
1672	♑ 27:30:30	83:22:10	♉ 16:59:30	♋ 9:26:0	69:27:40 B	69739 D	9,843476	Febr. 20:8:37
1677	♏ 26:49:10	79:3:15	♌ 17:37:5	♋ 16:21:5	75:44:10 B	28059 R	9,448072	Apr. 26:0:37$\frac{1}{2}$
1680	♑ 2:2:0	60:56:0	♐ 22:39:30	♐ 27:26:50	8:11:40 A	612$\frac{1}{2}$ D	7,787106	Dec. 8:0:6
1682	♉ 21:16:30	17:56:0	♒ 2:52:45	♒ 2:0:30	16:59:20 B	58328 R	9,765877	Sept. 4:7:39
1683	♍ 23:23:0	83:11:0	♊ 25:29:30	♋ 10:36:55	82:52:0 B	56020 R	9,748343	Jul. 3:2:50
1684	♐ 28:15:0	65:48:40	♏ 28:52:0	♐ 15:15:25	26:35:20 A	96015 D	9,982339	Maj. 29:10:16
1686	♓ 20:34:40	31:21:40	♊ 17:0:30	♊ 16:24:0	31:17:35 B	32500 D	9,511883	Sept. 6:14:33
1698	♐ 27:44:15	11:46:0	♑ 0:51:15	♑ 0:47:20	0:38:10 A	69129 R	9,839660	Oct. 8:16:57

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav, 1732-1787

Beyträge zur Aufnahme der Theoretischen Mathematik

Bd.: Das vierte und letzte Stük

Rostock 1761

Math.u. 84-1/4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10625646-6
VD18 91002567